Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos - 2019

Prova escrita de conhecimentos específicos de MATEMÁTICA

Instruções gerais

1. A prova é constituída por dois grupos de questões obrigatórias.

2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;

3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;

4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;

5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizadas.

6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);

7. A seguir ao número de cada questão encontra entre parênteses a respetiva cotação.

Leiria, 1 de junho de 2019

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2019

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **8 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 7**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 8**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere o polinómio P, definido por, $P(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 2x + b$, onde a e b são constantes reais.

   Quais os valores de a e b de modo a que o polinómio P seja divisível por $x - 1$ e que dividido por $2x + 4$ dê resto 3?

   (**A**) $a = -13 \wedge b = 13$. (**B**) $a = -3 \wedge b = -13$.

   (**C**) $a = 3 \wedge b = -13$. (**D**) $a = -13 \wedge b = -3$.

2. Considere a função f, real de variável real, contínua no intervalo $[2, 5]$, com $f(2) = 8$ e $f(5) = 3$.

   Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

   (**A**) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[2, 5]$.

   (**B**) A função f não tem zeros no intervalo $[2, 5]$.

   (**C**) A equação $f(x) = 6$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[2, 5]$.

   (**D**) A equação $f(x) = 6$ não tem solução no intervalo $[2, 5]$.

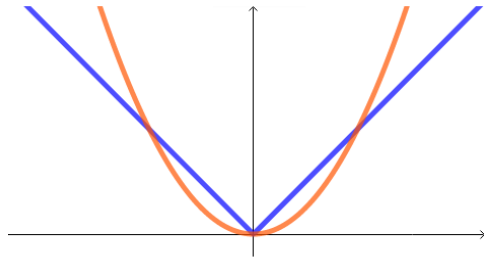
3. Considere o limite,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 4x + 3}.$$

   Qual é o valor do limite?

   (**A**) $\frac{1}{2}$. (**B**) 2. (**C**) -2. (**D**) $-\frac{1}{2}$.

4. Na figura estão representadas graficamente as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas respetivamente por, $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|$.



Qual é o conjunto solução da inequação, $g(x) > f(x)$?

(**A**) $]-1, 0[\cup]0, 1[$.

(**B**) $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$.

(**C**) $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

(**D**) $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$.

5. Considere a função h, real de variável real, definida por,

$$h(x) = \begin{cases} k + \cos(x) & se \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

onde k é uma constante real, cos designa o cosseno e ln designa o logaritmo de base e.

Qual é o valor de k de modo a que a função h seja contínua em $\mathbb{R}$?

(**A**) -1.

(**B**) 0.

(**C**) 1.

(**D**) 2.

6. Considere a função r, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por, $r(x) = x^a + a^2 \ln(x)$, onde a é um número real maior do que 1 e ln designa o logaritmo de base e.

Seja s a reta tangente ao gráfico da função r no ponto de abcissa a.

Qual é o declive da reta s?

(**A**) $a^{a-1} + a^2$.

(**B**) $a^a + a^2$.

(**C**) $a^{a-1} + a$.

(**D**) $a^a + a$.

7. Considere o ângulo θ, orientado, tal que $\sin(\theta) > 0$ e $\tan(\theta) < 0$, onde sin designa o seno e tan designa a tangente.

Qual é a expressão do valor de $\cos(\theta)$?

(**A**) $\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}$.

(**B**) $\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$.

(**C**) $-\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$.

(**D**) $-\sqrt{1 + \sin^2(\theta)}$.

8. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, onde sin designa o seno.

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   (A) (u_n) é crescente.

   (B) (u_n) é decrescente.

   (C) (u_n) é um infinitamente grande.

   (D) (u_n) é limitada.

9. Os três irmãos Silva e os quatro irmãos Azevedo vão escolher, de entre eles, dois elementos de cada família para um jogo de matraquilhos, de uma família contra a outra.

   De quantas maneiras pode ser feita a escolha dos jogadores de modo a que o Raúl, o mais velho dos irmãos Silva, seja um dos escolhidos?

   (A) 20. **(B)** 16. **(C)** 12. **(D)** 8.

10. Numa coletividade da cidade de Leiria há duas atividades ao dispor dos jovens: dança no rancho folclórico e jogo de xadrez. Dos 54 inscritos nessas atividades, 33 dançam no rancho folclórico e 30 jogam xadrez.

    Qual é a probabilidade de um jovem escolhido ao acaso jogar xadrez, sabendo que dança no rancho folclórico?

    (A) $\frac{3}{11}$. **(B)** $\frac{5}{9}$. **(C)** $\frac{1}{6}$. **(D)** $\frac{10}{11}$.

Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere a função polinomial P, real de variável real, definida por, $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + \alpha$, onde α é um parâmetro real.

   (a) Determine o valor de α de modo a que a função polinomial P seja divisível por $x + 1$.

   (b) Considere $\alpha = 6$.

      i. Determine a decomposição em fatores do 1.º grau da função polinomial P.

      ii. Determine o conjunto solução da condição, $P(x) \leq 0$.

      iii. Determine o valor do limite, $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)$.

2. Considere a função f, real de variável real, definida por, $f(x) = 2 + 4x^2 e^{-x}$, onde e designa o número de Neper.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Determine a derivada da função f.

   (b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

   (c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1.

   (d) Determine o valor do limite, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x^2}$.

3. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{3n - 10}{n + 2}$.

   (a) Averigue se a sucessão é monótona e, em caso afirmativo, indique o tipo de monotonia.

   (b) Determine o termo de menor ordem da sucessão que é maior que 2.

   (c) Indique, justificando, se a sucessão é limitada.

4. Num autocarro viajam 12 homens e 6 mulheres.

   Determine de quantas maneiras se pode organizar um grupo de 6 dessas pessoas, de forma que pelo menos duas delas, mas não mais que quatro, sejam homens.

5. Num clube desportivo, sabe-se que 52 % dos sócios são homens e que de entre todos os sócios, 35 % dos homens e 60 % das mulheres, pratica natação.

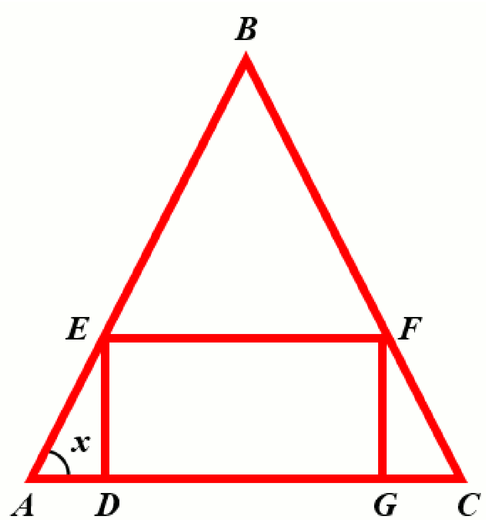
   Escolhe-se, ao acaso, sócio do clube desportivo.

   (a) Qual é a probabilidade de que pratique natação?

   (b) Sabendo que pratica natação, qual é a probabilidade de que seja mulher?

6. Na figura está representado o triângulo isósceles $[ABC]$ ($\overline{AB} = \overline{CB}$), o qual contém o retângulo $[DEFG]$, onde $\overline{DE} = 1$ e $\overline{DG} = 2$.

   Seja x a amplitude (em radianos) do ângulo BAC ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).



   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Demonstre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x, por,

$$f(x) = 2 + \tan(x) + \frac{1}{\tan(x)}$$

   onde tan designa a tangente.

   (b) Demonstre que a derivada da função f é dada por,

$$f'(x) = -\frac{\cos(2x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}.$$

   (c) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é mínima.

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \cdot Altura$

Probabilidades

$\mu = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Limites Notáveis

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{u_n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

COTAÇÕES

Grupo I	**70**
Cada resposta certa	7
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0
Grupo II	**130**
1.	25
(a)	5
(b)	20
i.	8
ii.	7
iii.	5
2.	30
(a)	8
(b)	8
(c)	7
(d)	7
3.	20
(a)	6
(b)	6
(c)	8
4.	10
5.	20
(a)	12
(b)	8
6.	25
(a)	10
(b)	10
(c)	5
Total	**200**