Prova Escrita de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova escrita inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova escrita encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As **sete questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta, das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos e nem justificações**.

1. Para cada valor real k, a função polinomial $\mathcal{P}$ na variável x definida por

$$\mathcal{P}(x) = (x-1)\left(-x^2+kx-1\right)$$

é um polinómio do 3.^{o} grau.

O valor de k para o qual a função polinomial $\mathcal{P}$ tem um único zero é:

(A) -3. **(B)** 1.

(C) 3. **(D)** 4.

2. Os parâmetros reais α, β e λ que verificam

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x+\lambda}{x^2+3} = \frac{3x+1}{(x+1)(x^2+3)}$$

são:

(A) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{5}{2}$ e $\lambda = -\frac{1}{2}$. **(B)** $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{1}{2}$.

(C) $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\lambda = \frac{5}{2}$. **(D)** $\alpha = \frac{5}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $\lambda = -\frac{1}{2}$.

3. Considere as funções f e g, reais de variável real, definidas por

$$f(x) = x \sin(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + |x|$$

onde sin designa a função seno.

Pode afirmar-se que:

(**A**) a função f é ímpar e a função g é par.

(**B**) as duas funções são ímpares.

(**C**) a função f é par e a função g é ímpar.

(**D**) as duas funções são pares.

4. Seja θ a amplitude de um ângulo do 2.º quadrante e tal que $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$, onde sin designa a função seno.

O valor da expressão

$$2(\cos(\theta) + \tan(\theta)) + 0.1$$

onde cos designa a função cosseno e tan designa a função tangente, é igual a:

(**A**) 3.2.

(**B**) 3.1.

(**C**) -3.1.

(**D**) -3.0.

5. Considere a função h, real de variável real, definida por

$$h(x) = \frac{\ln(3-x)}{e^{x-2} - 1}$$

onde ln designa o logaritmo na base e e e designa o número de Neper.

O domínio da função h é:

(**A**) $D_h =]-\infty, 3[\setminus \{2\}$.

(**B**) $D_h =]-\infty, 3] \setminus \{2\}$.

(**C**) $D_h =]-\infty, 3]$.

(**D**) $D_h =]3, +\infty[$.

6. Para cada valor real μ, a expressão define uma função $\mathcal{H}$, real de variável real, definida por

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & se \quad x \neq -2 \\ \mu + 1 & se \quad x = -2 \end{cases}.$$

O valor de μ para o qual a função $\mathcal{H}$ é contínua no ponto de abcissa -2 é:

(**A**) -5.

(**B**) 2.

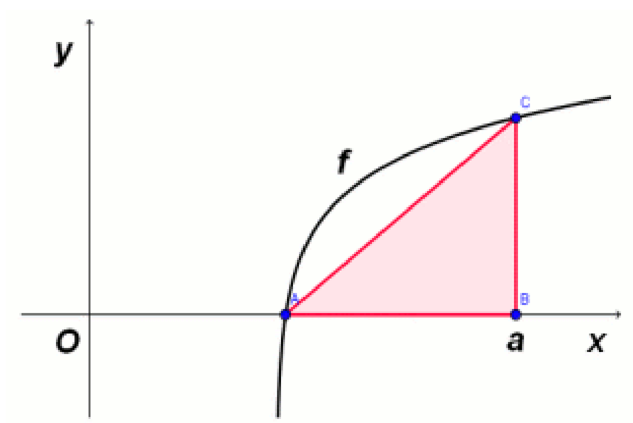
(**C**) 5.

(**D**) 6.

7. A figura representa parte do gráfico de uma função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \log_a(x)$$

onde $\log_a$ designa o logaritmo na base a e o triângulo retângulo que tem dois vértices sobre o gráfico da função f e dois vértices sobre o eixo Ox.



A área do triângulo retângulo é:

(**A**) $\dfrac{a(a-1)}{2}$.

(**B**) $\dfrac{a^2}{2}$.

(**C**) $\dfrac{a-1}{2}$.

(**D**) $\dfrac{a}{2}$.

Grupo II

- Nas questões deste grupo descreva o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere as funções reais de variável real:

   - a função polinomial f definida por $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8$;
   - a função racional g definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{(x^2-1)(x-3)}$.

   (a) Indique o domínio da função f e o domínio da função g.

   (b) Determine a decomposição em fatores do 1.º grau da função f.

   (c) Indique, justificando, se a função f é uma função injetiva.

   (d) Mostre que
   $$g(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-3}, \qquad \forall x \in D_g$$
   onde D_g designa o domínio da função g.

   (e) Determine o conjunto solução da condição $-g(x) \geq 0$.

   (f) Estude a monotonia (sentido de variação) da função g.

   (g) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de coordenadas $(2, g(2))$.

2. As várias culturas de uma zona de cultivo estão afetadas por uma doença sazonal.

   A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.

   Admita que a área A, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função do tempo t, por

   $$A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1), \qquad t \in [0,16[$$

   onde t designa o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detetada a doença e ln designa o logaritmo na base e e e designa o número de Neper.

   Resolva, **<u>recorrendo a métodos exclusivamente analíticos</u>**, os dois itens seguintes e apresente o resultado, em hectares, **<u>arredondado às centésimas</u>**.

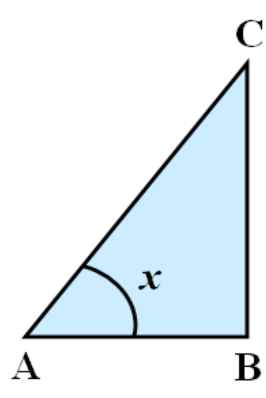
   (a) Quando a doença foi detetada, já uma parte da área de cultivo estava afetada.

   Passado uma semana, a área de cultivo afetada pela doença aumentou.

   De quanto foi esse aumento?

   (b) Determine a área máxima afetada pela doença.

3. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$, cujos catetos são $[AB]$ e $[BC]$.



   Considere que $\overline{AB} = 1$ e que x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAC.

(a) Mostre que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado pela função P, real de variável real, definida por

$$P(x) = \frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{\cos(x)}, \qquad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

onde sin designa a função seno e cos designa a função cosseno.

(b) Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{3}{5}$. Determine o valor de $P(\theta)$.

(c) Mostre que

$$P'(x) = \frac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

(d) Usando a alínea anterior, estude a monotonia (sentido de variação) da função P e interprete geometricamente esse resultado.

FIM da Prova Escrita

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Trigonometria

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)}$$

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

$\cos(2 \cdot a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono Regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Setor Circular: $\dfrac{\alpha \times r^2}{2}$ (α – amplitude em radianos do ângulo ao centro, r – raio)

COTAÇÕES

Grupo I		**70**
Cada resposta certa	10	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0	
Grupo II		**130**
1.	70	
(a)	5	
(b)	15	
(c)	5	
(d)	7	
(e)	15	
(f)	15	
(g)	8	
2.	20	
(a)	5	
(b)	15	
3.	40	
(a)	10	
(b)	10	
(c)	10	
(d)	10	
Total		**200**