instituto politécnico de leiria

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos - 2020

Prova escrita de conhecimentos específicos de MATEMÁTICA

Instruções gerais

1. A prova é constituída por dois grupos de questões obrigatórias.

2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;

3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;

4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;

5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizada.

6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);

7. Na última página do teste encontra as cotações de cada questão.

Leiria, 20 de junho de 2020

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2020

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **9 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere a igualdade racional definida por,

$$\frac{x+a^2}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x-3}-\frac{2}{x+b}$$

onde a e b são constantes reais.

Quais os valores de a e b de modo a que a igualdade racional seja verdadeira?

(A) $a=1 \wedge b=3$.

(B) $a=3 \wedge b=-1$.

(C) $a=3 \wedge b=1$.

(D) $a=-1 \wedge b=3$.

2. Considere a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que 3 é um zero da função f.

Considere a função g, real de variável real, definida por,

$$g(x)=|f(2x-1)-5|$$

qualquer que seja o número real x.

Qual o ponto que pertence ao gráfico da função g?

(A) $(3,5)$.

(B) $(3,-5)$.

(C) $(2,5)$.

(D) $(2,-5)$.

3. Considere a função h, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por,

$$h(x) = \log_{10}(x)$$

onde $\log_{10}$ designa o logaritmo na base 10.

Qual é o valor da constante real k para o qual se verifica a igualdade definida por,

$$h(kx) = 1 + h(x)$$

qualquer que seja o número real positivo x?

(**A**) 2. (**B**) 10. (**C**) 8. (**D**) 6.

4. Considere que $\tan(\theta) = -\sqrt{3}$ e $\theta \in]0^o, 180^o[$, onde tan designa a tangente.

Considere a expressão definida por,

$$\sin^2(\theta) + 3\cos(\theta)$$

onde sin designa o seno e cos designa o cosseno.

Qual é o valor da expressão?

(**A**) $-\frac{4}{3}$. (**B**) $-\frac{3}{4}$. (**C**) $\frac{3}{4}$. (**D**) $\frac{4}{3}$.

5. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

Sabe-se que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ e $P(A \cup B) = 0,5$, onde P designa a probabilidade.

Qual é a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza?

(**A**) $\frac{1}{6}$. (**B**) $\frac{1}{4}$. (**C**) $\frac{1}{3}$. (**D**) $\frac{1}{2}$.

6. Considere a progressão geométrica (u_n), monótona crescente.

Sabe-se que $u_4 = 32$ e que $u_8 = 8192$.

Qual é o quinto termo da progressão geométrica (u_n)?

(**A**) 512. (**B**) 256. (**C**) 128. (**D**) 64.

7. Considere a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-n}$.

Qual das afirmações é verdadeira?

(**A**) A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

(**B**) A sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão 4.

(**C**) A sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão 4.

(**D**) A sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{4}$.

8. Considere a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 3 é a reta definida por, $y = 2x + 1$.

Considere o limite definido por,

$$\lim_{x \to 3} \frac{[f(x)]^2 - [f(3)]^2}{x - 3}.$$

Qual é o valor do limite?

(**A**) -28. (**B**) 0. (**C**) 28. (**D**) 29.

9. Considere as funções g e h, reais de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por,

$$g(x) = xe^{2x-1} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^2 + \sin(\pi x)$$

onde e designa o número de Neper e sin designa o seno.

Qual é o valor da derivada $(g \times h)'\left(\frac{1}{2}\right)$?

(**A**) 3. (**B**) 2. (**C**) $\frac{1}{2}$. (**D**) $\frac{7}{8}$.

10. Considere que num plano existem 15 pontos, entre os quais não há três pontos alinhados.

Sabe-se que desses 15 pontos, 4 são vermelhos, 5 são verdes e 6 são azuis.

Quantas retas se podem formar com dois pontos de cores diferentes?

(**A**) 105. (**B**) 74. (**C**) 44. (**D**) 31.

Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere as funções reais de variável real:

   - a função polinomial f, definida por, $f(x) = x^2 - 2x - 3$;
   - a função polinomial g, definida por, $g(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$;
   - a função polinomial h, definida por, $h(x) = x^4 - 3x^2 + ax^2 + bx + 6$, onde a e b são constantes reais;
   - a função racional R, definida por, $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Determine a decomposição em fatores do 1.^{o} grau da função polinomial g.

   (b) Determine o valor de a e b de modo a que a função polinomial h seja divisível pela função polinomial f.

   (c) Determine o conjunto solução da condição, $R(x) \geq 0$.

   (d) Determine o valor do limite, $\lim\limits_{x \to -\infty} R(x)$.

2. Uma fábrica utiliza as máquinas A, B e C, no fabrico de um determinado tipo de peças.

   As máquinas B e C produzem o mesmo número de peças e a máquina A produz o dobro das peças, no mesmo tempo.

   Durante a produção das peças ocorrem erros que provocam a produção de peças defeituosas.

   Suponha que 2% das peças produzidas tanto pela máquina A, como pela B e que 4% das peças produzidas pela máquina C, são defeituosas.

Retirou-se ao acaso uma peça do conjunto das que foram produzidas por aquelas máquinas.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

(a) Qual a probabilidade da peça ser defeituosa?

(b) Sabendo que a peça é defeituosa, qual a probabilidade de ter sido produzida pela máquina A?

3. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

   Sabe-se que:

   - $P(A \cap B) = 0,10$;
   - $P(A \cup B) = 0,80$;
   - $P(A|B) = 0,25$;

   onde P designa a probabilidade.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva o item.

   Demonstre que os acontecimentos A e $\overline{A}$ são acontecimentos equiprováveis, onde $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A.

4. Considere a progressão aritmética (a_n).

   Sabe-se que $a_1 = k$, $a_2 = k + 2$ e $a_3 = 4k - 8$, onde k é um valor real.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Determine o valor real k.

   (b) Indique, justificando, a razão da progressão e o seu sexto termo.

   (c) Determine a soma dos quinze termos da progressão, começando no sexto termo inclusive.

5. Considere a função f, real de variável real, definida por,

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

onde ln designa logaritmo na base e e e designa o número de Neper.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

(a) Determine o domínio da função f.

(b) Determine a derivada da função f.

(c) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

(d) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1.

6. Considere a função T, real de variável real, definida por,

$$T(t) = 19 + 4\cos\left(\frac{14 - t}{12}\pi\right)$$

onde t designa a hora do dia ($0 \leq t \leq 24$) e cos designa o cosseno.

Sabe-se que a função T descreve a variação da temperatura, em graus Celsius, ao longo das horas de um dia do mês de junho na cidade de Leiria.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

(a) Determine a temperatura às 8 horas.

(b) Determine a que horas do dia a temperatura foi igual a 21 graus Celsius.

(c) Indique, justificando, a que horas do dia se verifica a temperatura máxima e a temperatura mínima.

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \cdot Altura$

Probabilidades

$\mu = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Limites Notáveis

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{u_n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

COTAÇÕES

Grupo I		**70**
Cada resposta certa	7	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0	
Grupo II		**130**
1.		30
(a)	6	
(b)	8	
(c)	10	
(d)	6	
2.		20
(a)	10	
(b)	10	
3.		15
4.		20
(a)	6	
(b)	6	
(c)	8	
5.		25
(a)	5	
(b)	7	
(c)	8	
(d)	5	
6.		20
(a)	5	
(b)	6	
(c)	9	
Total		**200**