

VERSÃO B

- Na sua folha de respostas escreva "**VERSÃO B**".
- A ausência desta indicação implica a anulação de todas as questões da escolha múltipla.

- Identifique claramente os grupos e as questões que responde.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo-saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "esferográfica-lápis" e de **corrector**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão, são indicadas **quatro alternativas** de resposta, das quais só **uma está correcta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorrectas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Os parâmetros reais A e B , de modo que

$$\frac{A}{x-1} - \frac{B}{x+3} = \frac{-4x}{x^2 + 2x - 3}$$

são:

(A) $A = 1$ e $B = 3$.

(B) $A = 1$ e $B = -3$.

(C) $A = -1$ e $B = 3$.

(D) $A = -1$ e $B = -3$.

2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \ln(1 - x^2)$$

onde \ln designa o logaritmo de base e e e designa o número de Neper.

O domínio da função f é:

(A) $D_f =]0, +\infty[$.

(B) $D_f =]-1, 1[$.

(C) $D_f =]-2, 2[$.

(D) $D_f =]-e, e[$.

3. Seja α um ângulo do 2º quadrante tal que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

O valor da expressão $\tan \alpha + 1$ é igual a:

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$.
(C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{5}$.

4. O conjunto solução, em \mathbb{R} , da equação $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2}$ é:

- (A) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (B) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
(C) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. (D) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x = -2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Considere as funções reais de variável real definidas por $g(x) = 2^x$ e $h(x) = 3^x$.

O conjunto solução, em \mathbb{R} , da inequação $g(x) > h(x)$ é:

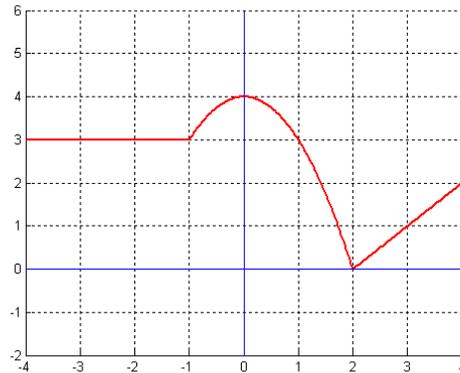
- (A) Conjunto vazio. (B) \mathbb{R}^- .
(C) \mathbb{R}^+ . (D) \mathbb{R} .

6. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = xe^{-x}$, onde e designa o número de Neper.

Qual das seguintes expressões define analiticamente a equação da recta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1?

- (A) $y = \frac{1}{e}$. (B) $y = \frac{1}{e}x$.
(C) $y = x + \frac{1}{e}$. (D) $y = \frac{1}{e}x + 1$.

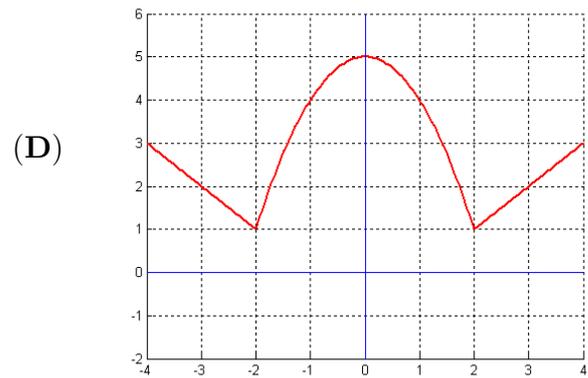
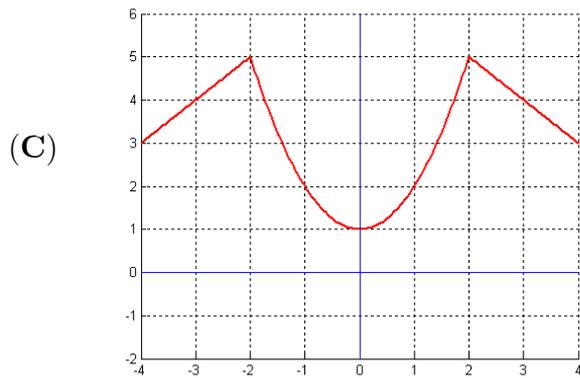
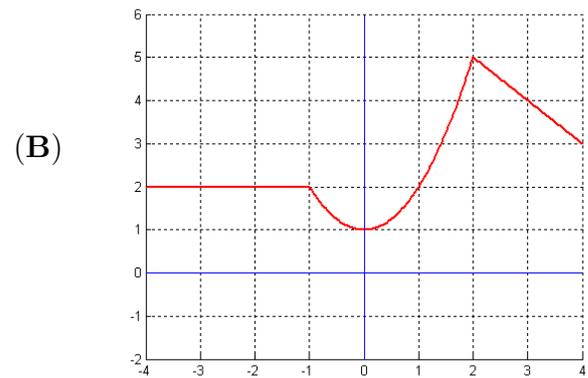
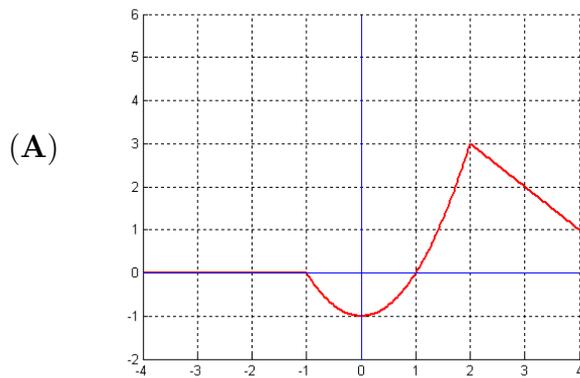
7. A figura seguinte representa, num referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função real de variável real g no intervalo $[-4, 4]$.



Qual dos seguintes gráficos representa a função real de variável real definida por

$$h(x) = 5 - g(|x|)$$

no intervalo $[-4, 4]$?



Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, apresentando **todos os cálculos** que efectuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode recorrer à sua máquina de calcular para efectuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

- a função cúbica definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$;
- a função cúbica definida por $g(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 3)$;
- a função de grau quatro definida por $h(x) = 4x^4 - ax^2 + bx - 4$.

(a) Determine:

- i. $f(2)$.
- ii. os zeros da função f .
- iii. os valores reais de a e b , de modo que a função h seja divisível por $x^2 - 4$.

(b) Determine os valores de x para os quais:

- i. $f(x)$ e $g(x)$ tomam o mesmo valor.
- ii. $g(x)$ é inferior a zero.
- iii. $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 3$.

2. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 1} & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ 5 - x & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade da função f no ponto de abscissa 2.

(b) Indique, justificando, o valor lógico da afirmação:

"a função f é derivável no ponto de abscissa 2".

(c) Determine:

i. a partir da definição $f'(3)$.

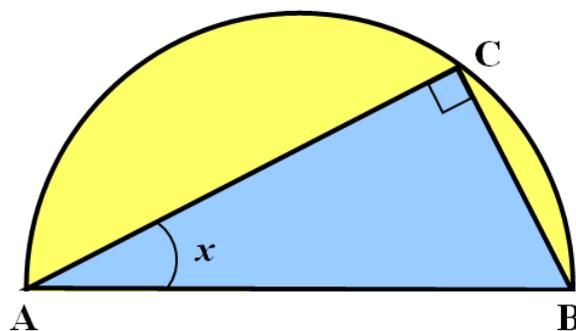
ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(d) Determine a função derivada da função f .

3. A figura ao lado representa um semicírculo de diâmetro $[AB]$ e um triângulo $[ABC]$ nele inscrito.

Sabe-se que:

- x é a amplitude do ângulo BAC ;
- $\overline{AB} = 10$.



Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

(a) Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, por

$$A(x) = 25 \sin(2x).$$

(b) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo é máxima.

4. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas.

A área afectada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.

Admita que a área, em hectares, afectada pela doença, é dada, em função do tempo t , por

$$A(t) = 2 - t + 5 \ln(t + 1)$$

sendo t ($0 \leq t < 16$) o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença (ln designa o logaritmo de base e e e designa o número de Neper).

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

(a) Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afectada.

Passada uma semana, a área de cultivo afectada pela doença aumentou.

De quanto foi esse aumento?

Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

(b) Determine a área máxima afectada pela doença.

Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Trigonometria

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\sin(2 \cdot a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos(2 \cdot a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

COTAÇÕES

Grupo I		70
	Cada resposta certa	10
	Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0
Grupo II		130
1.		45
	a.	20
	i.	3
	ii.	7
	iii.	10
	b.	25
	i.	7
	ii.	8
	iii.	10
2.		45
	a.	10
	b.	5
	c.	16
	i.	8
	ii.	8
	d.	14
3.		20
	a.	10
	b.	10
4.		20
	a.	6
	b.	14
Total		200