VERSÃO B

- Na sua folha de respostas, escreva "**VERSÃO B**".
- **A ausência desta indicação implica a anulação de todas as questões da escolha múltipla**.

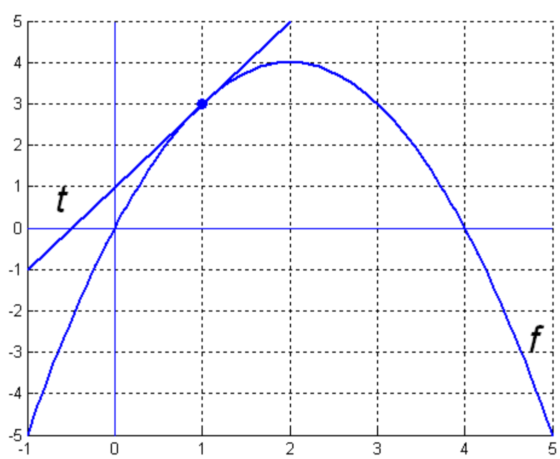
- **Identifique claramente os grupos e as questões que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo-saxónico**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada questão, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais apenas uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais que uma letra ou esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorrectas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos nem justificações**.

1. A figura seguinte representa, num referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função real de variável real f.

   A recta t é a recta tangente ao gráfico da função f no ponto de coordenadas $(1, 3)$.

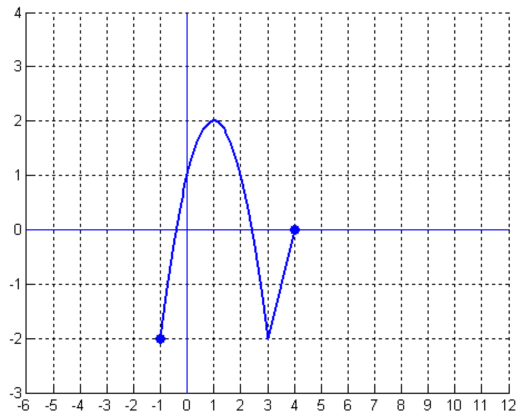


   Qual das seguintes expressões define analiticamente a recta t?

   (A) $y = 2x - 1.$ **(B)** $y = 2x + 1.$

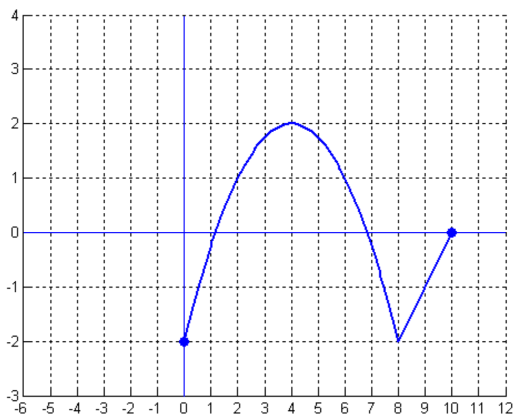
   (C) $y = -2x + 5.$ **(D)** $y = x + 2.$

2. A figura seguinte representa, num referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função real de variável real g.

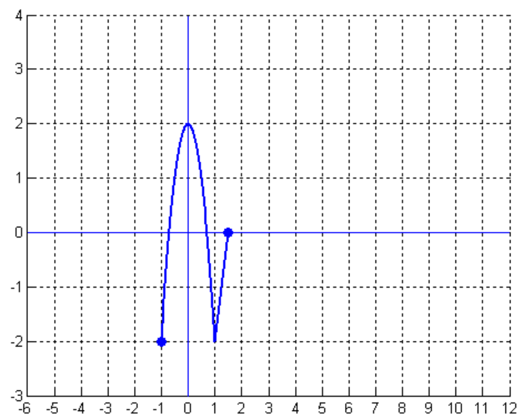


Qual dos seguintes gráficos representa a função real de variável real $g\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$?

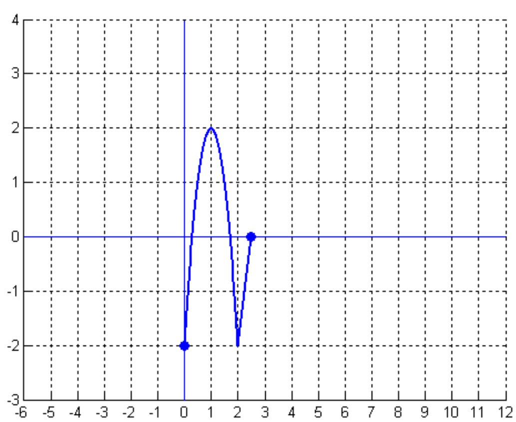
(A)



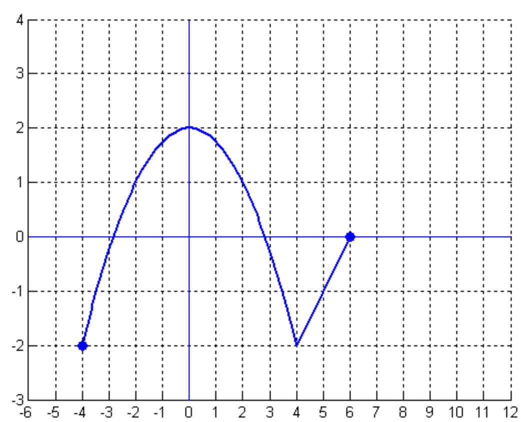
(B)



(C)



(D)



3. Seja h a função real de variável real definida por $h(x) = \dfrac{x^2-1}{\sin(2x)-1}$.

O domínio da função h é:

(**A**) $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. (**B**) $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(**C**) $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. (**D**) $D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{x+3}\right)$, onde ln designa o logarítmo de base e e e designa o número de Neper.

O domínio da função f é:

(**A**) $D_f =]-3, +\infty[$. (**B**) $D_f =]-3, 1[$.

(**C**) $D_f =]-\infty, 1[$. (**D**) $D_f = [-3, 1]$.

5. Seja p a função polinomial na variável x definida por $p(x) = 3(x^2-1) - x^3 + x$.

A decomposição em factores da função p é:

(**A**) $p(x) = (x-3)(x+1)^2$. (**B**) $p(x) = (x-3)(x-1)^2$.

(**C**) $p(x) = x(x-1)(x+1)$. (**D**) $p(x) = (3-x)(x-1)(x+1)$.

6. Seja g a função real de variável real definida por $g(x) = 4e^{2x}$.

O conjunto solução da condição $g(x) \leq 1$ é:

(**A**) $]-\infty, -\ln 2]$. (**B**) $[-\ln 2, +\infty[$.

(**C**) $[0, \ln 2]$. (**D**) $]-\ln 2, 0[$.

7. Seja α um ângulo do 3^o quadrante, tal que $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

O valor da expressão $4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sqrt{3}\tan(7\pi - \alpha)$ é igual a:

(**A**) 4. (**B**) $1 + \sqrt{3}$.

(**C**) -2. (**D**) $1 - \sqrt{3}$.

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que efectuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode recorrer à sua máquina de calcular para efectuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

   - a função cúbica f definida por $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2$;
   - a função racional g definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{(2x+1)(x^2+2x-5)}$.

   (a) Determine os domínios, D_f e D_g, das funções f e g, respectivamente.

   (b) Determine $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ e a decomposição em factores da função f.

   (c) Determine o valor dos parâmetros reais a, b e c, tais que

   $$g(x) = a + \frac{bx+c}{x^2+2x-5}, \qquad \forall x \in D_g.$$

   (d) Mostre que

   $$g'(x) = \frac{2(x-2)(x-1)}{(x^2+2x-5)^2}, \qquad \forall x \in D_g$$

   onde g' designa a função derivada de g.

   (e) Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0.

   (f) Considere o seguinte teorema:

   Teorema *Uma função real de variável real F é **estritamente decrescente** se e somente se*

   $$\forall x \in D_F, \quad F'(x) < 0$$

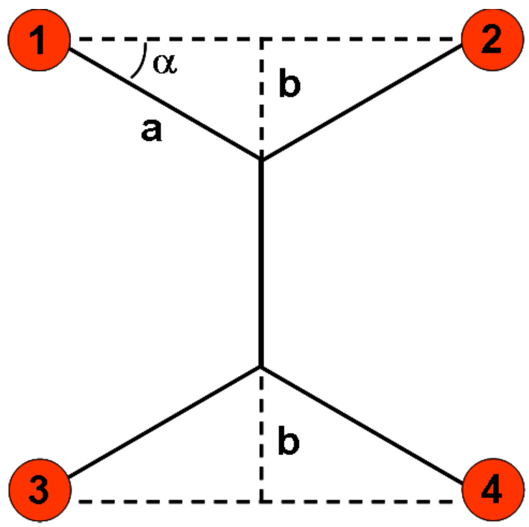
   onde D_F designa o domínio de F e F' designa a função derivada de F.

   Determine todos os valores de D_g para os quais a função g é *estritamente decrescente*.

2. O Instituto Politécnico de Leiria pretende instalar um cabo de fibra óptica entre quatro edifícios.

Suponha que os quatro edifícios se localizam nos vértices de um quadrado com um quilómetro de lado.

A empresa responsável pela instalação do cabo de fibra óptica, inspirada nos trabalhos do matemático *Jacob Steiner* (século XIX), chegou à conclusão que a solução mais económica tem a configuração que a seguinte figura ilustra.



(a) Seja C a expressão que exprime o comprimento total do cabo, em função do ângulo α. Com base nos dados da figura, mostre que esse comprimento é dado por

$$C(\alpha) = 1 + \frac{2 - \sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

(b) Determine $C(0)$ e $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$, na unidade considerada e represente geometricamente a respectiva configuração do cabo.

(c) Para determinar o valor de α para o qual o comprimento total do cabo é o menor possível, tem-se que resolver a equação

$$\frac{2\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = 0. \tag{1}$$

Resolva a equação (1) e indique o valor de α para o qual comprimento total do cabo é o menor possível. Em seguida, determine, com duas casas decimais, o valor desse comprimento, na unidade considerada.

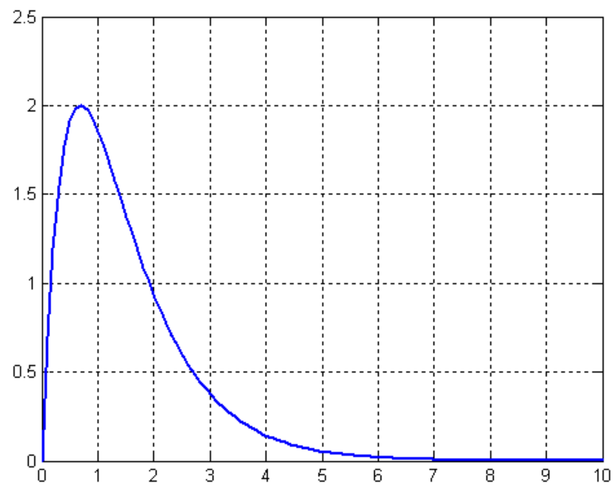
3. Um determinado antibiótico foi injectado no sangue de um animal doente.

A concentração C do antibiótico injectado é uma função do tempo t, definida por

$$C(t) = 8\left(e^{-t} - e^{-2t}\right), \qquad t \in [0, +\infty[$$

onde e designa o número de Neper e t está expresso em minutos.

A figura seguinte ilustra o gráfico da função C, nos primeiros 10 minutos.



(a) Determine, com duas casas decimais, os instantes para os quais o valor da concentração é igual a $\frac{7}{8}$.

(b) Descreva o que acontece à concentração de antibiótico no sangue do animal, desde o instante inicial, tendo em atenção o gráfico da figura.

(c) Determine, com duas casas decimais, o instante do tempo t para o qual $C'(t) = 0$, onde C' designa a função derivada de C.

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$(u\,v)' = u'v + u\,v'$

$\left(u^k\right)' = k\,u^{k-1}\,u', \quad k \in \mathbb{R}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(a^u)' = u'a^u \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Trigonometria

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Cotações

Grupo I **70**

Cada resposta certa 10

Cada resposta errada, anulada ou não respondida 0

Grupo II **130**

1. .... **60**
   - a. 8
   - b. 10
   - c. 12
   - d. 14
   - e. 6
   - f. 10
2. .... **35**
   - a. 13
   - b. 8
   - c. 14
3. .... **35**
   - a. 12
   - b. 8
   - c. 15