

IPL

instituto politécnico
de leiria

**Provas Especialmente Adequadas
Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência
dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria
dos Maiores de 23 Anos**

Prova Escrita de Conhecimentos Específicos de MATEMÁTICA

Instruções gerais

1. A prova é constituída por **2 grupos de resposta obrigatória** (Grupo I e Grupo II), onde o Grupo I é constituído por sete questões de escolha múltipla e o Grupo II é constituído por três grupos de questões de resposta aberta.
2. A duração da prova é de **2 horas** (120 minutos), estando previsto uma tolerância de **30 minutos**.
3. Para a elaboração das suas respostas e para a realização de eventuais rascunhos, só pode utilizar as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento.
4. Não utilize qualquer tipo de corrector. Se necessário risque ou peça uma troca de folha.
5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza electrónica (telemóvel, pda, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados).
6. Deverá disponibilizar ao docente vigilante, sempre que solicitado, um documento válido de identificação com fotografia (bilhete de identidade, carta de condução, passaporte ou outro não especificado).

VERSÃO A

- Na sua folha de respostas, escreva "**VERSÃO A**".
- A ausência desta indicação implica a anulação de todas as questões da escolha múltipla.

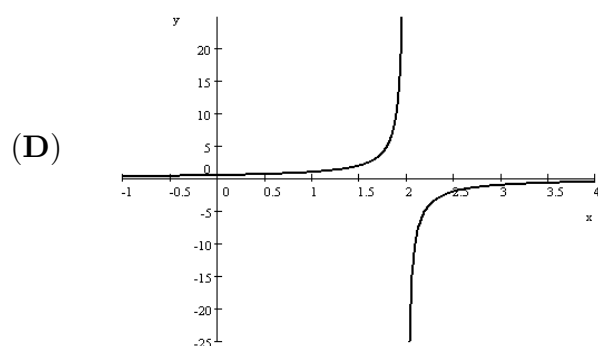
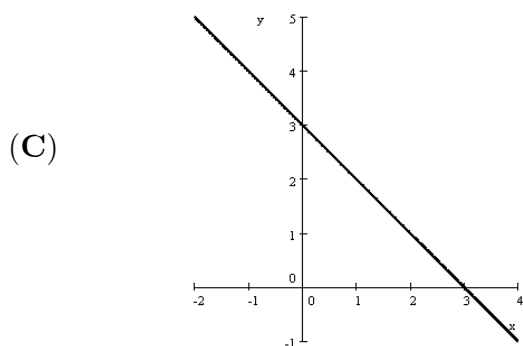
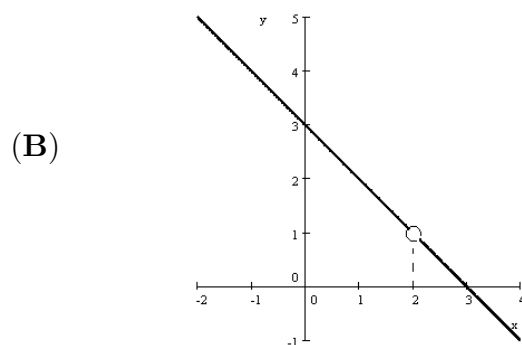
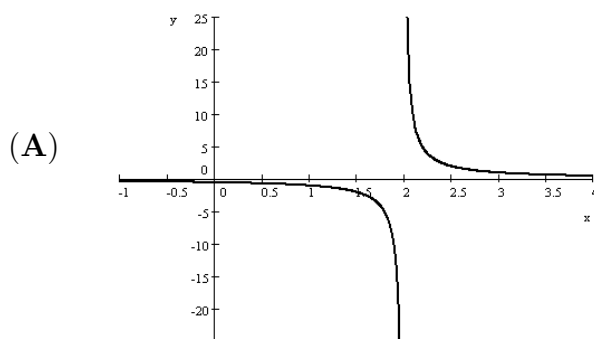
- Identifique claramente os grupos e as questões que responde.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo-saxónico**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

Grupo I

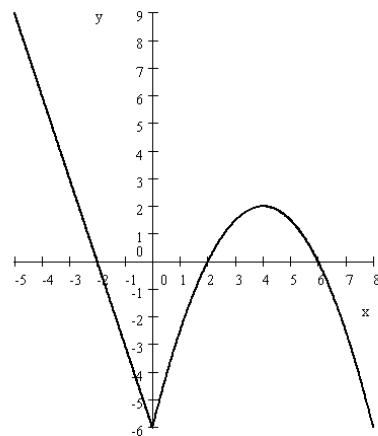
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada questão, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais apenas uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais que uma letra ou esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorrectas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}$.

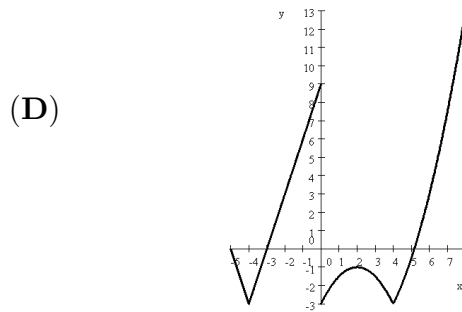
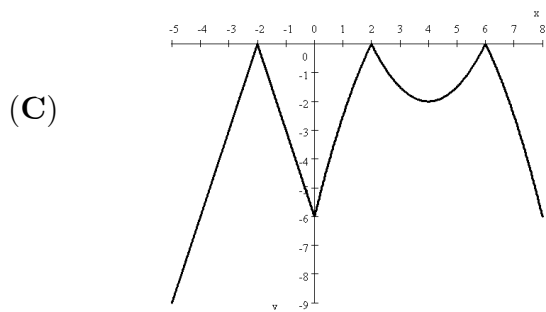
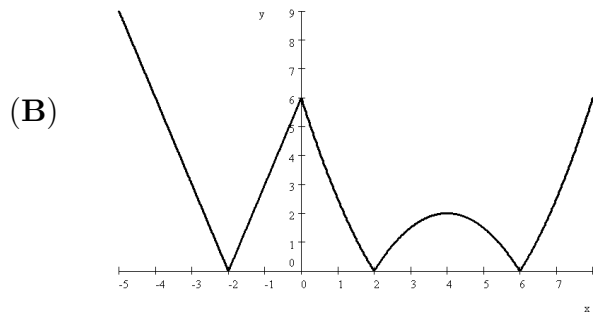
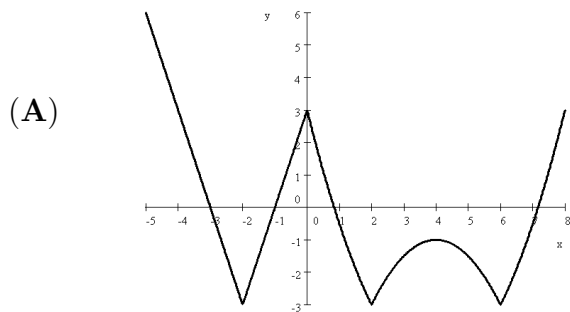
Qual dos gráficos seguintes representa a função f , num referencial o.n. xOy ?



2. A figura ao lado representa, num referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função real de variável real g .



Qual dos gráficos seguintes representa a função real de variável real h definida por $h(x) = |g(x)| - 3$?



3. Da função afim f , sabe-se que $f(0) = 3$ e $f(1) = -2$.

A expressão analítica da função afim f é:

- (A) $y = 3x - 2$. (B) $y = 5x + 3$.
 (C) $y = -2x + 3$. (D) $y = -5x + 3$.

4. O domínio da função real de variável real g definida por $g(x) = \frac{1 + \sqrt{8 - x}}{(x + 1)(x^2 - x + 2)}$ é:

- (A) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. (B) $] -\infty, 8[\setminus \{-1\}$.
(C) $] -\infty, 8] \setminus \{-1\}$. (D) $[8, +\infty[$.

5. Seja h a função real de variável real definida por $h(x) = 2e^x - 1$, onde e designa o número de Neper.

O conjunto solução da condição $h(x) > 0$ é:

- (A) \mathbb{R} . (B) $] -\infty, \ln 2]$.
(C) $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$. (D) $] -\ln 2, +\infty[$.

6. Seja f a função real de domínio \mathbb{R}^+ definida por $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$, onde \ln designa o logaritmo de base e .

A função derivada de f é definida por:

- (A) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$. (B) $f'(x) = \ln x - 2$.
(C) $f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}$. (D) $f'(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2}$.

7. Seja α um ângulo agudo tal que $\tan \alpha = \sqrt{5}$.

O valor da expressão $\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$ é igual a:

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{5}{6}$.
(C) $\frac{7}{6}$. (D) $\frac{2}{5}$.

Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que efectuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode recorrer à sua máquina de calcular para efectuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

- a função cúbica f definida por $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$;
- a função racional g definida por $g(x) = \frac{f(x)}{(x^2 - 4)(x - 3)}$.

- (a) Indique os domínios, D_f e D_g , das funções f e g , respectivamente.
- (b) Determine $f(-2)$ e estude o sinal da função f .
- (c) Recorde que uma função real de variável real F é injectiva se e somente se

$$\forall x_1, x_2 \in D_F, x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$$

onde D_F designa o domínio de F .

A função f é injectiva? Justifique a sua resposta.

- (d) Mostre que

$$g(x) = \frac{x + 5}{x - 2}, \quad \forall x \in D_g.$$

- (e) Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.
- (f) Indique todos os valores de $x \in D_g$ que verificam a condição $g(-x) \geq \frac{2}{4 - x^2}$.

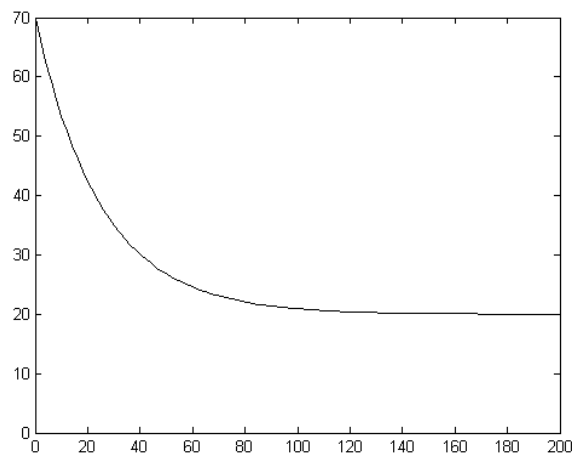
2. Numa pastelaria da cidade de Leiria, a temperatura ambiente é sempre constante.

Admita que a temperatura, em graus Celsius, de um chá servido nessa pastelaria, t minutos após ter sido colocado na chávena, é dado por

$$g(t) = 20 + 50e^{-0,04t}, \quad t \in [0, +\infty[$$

onde e designa o número de Neper.

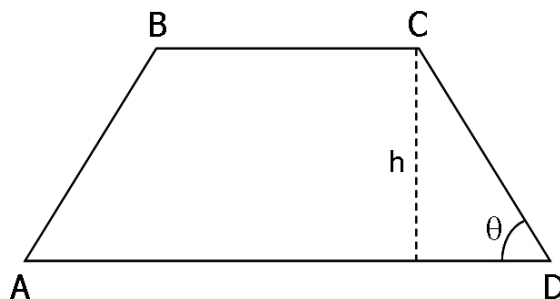
A figura seguinte ilustra o gráfico da função g , nos primeiros 200 minutos.



- (a) Determine um valor aproximado, com duas casas decimais, da temperatura do chá ao fim de 3 minutos após ter sido colocado na chávena.
- (b) Com o decorrer do tempo, a temperatura do chá tende a igualar a temperatura ambiente da pastelaria. Indique, justificando, a temperatura ambiente da pastelaria.
- (c) Justifique a seguinte afirmação: "*a taxa de variação média da função g , em qualquer intervalo do seu domínio, é negativa*".
- (d) Quanto tempo decorre entre o instante em que o chá é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge os 65°C ? Apresente o resultado em minutos e segundos.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo três casas decimais.

3. A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2$ dm.



Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC :

- (a) Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ .
(b) Mostre que a **área** do trapézio é dada, em função de θ , por

$$F(\theta) = 4 \sin \theta + 2 \sin(2\theta).$$

- (c) Para determinar o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima, o fabricante tem que resolver a equação

$$4 \cos \theta + 4 \cos(2\theta) = 0. \quad (1)$$

Resolva a equação (1) e indique o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima. Em seguida, determine o valor dessa área.

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(u^k)' = k u^{k-1} u', \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Trigonometria

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Cotações

Grupo I	70
Cada resposta certa	10
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0
 Grupo II	 130
1.	60
a.	8
b.	14
c.	6
d.	6
e.	12
f.	14
2.	35
a.	6
b.	5
c.	10
d.	14
3.	35
a.	10
b.	10
c.	15

VERSÃO B

- Na sua folha de respostas, escreva "**VERSÃO B**".
- A ausência desta indicação implica a anulação de todas as questões da escolha múltipla.

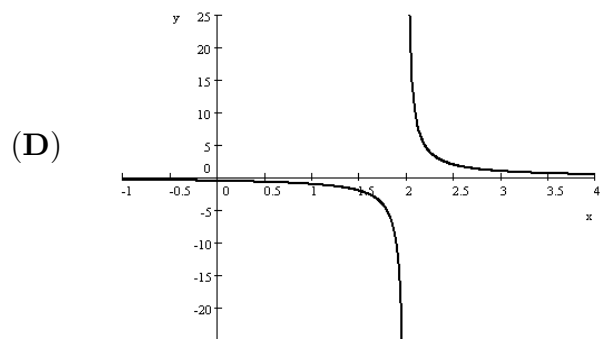
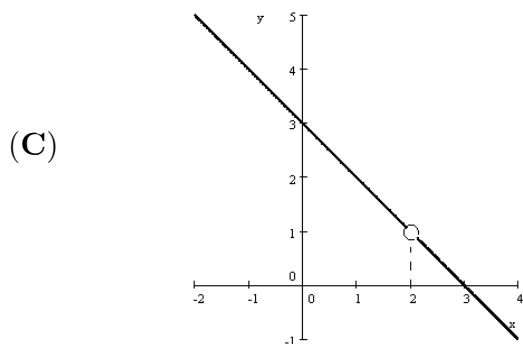
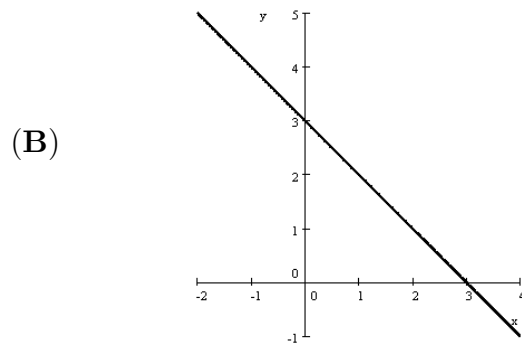
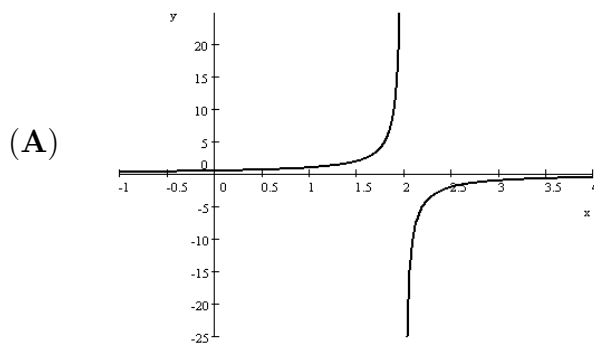
- Identifique claramente os grupos e as questões que responde.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo-saxónico**.
- A prova inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova encontram-se na **página 9**.

Grupo I

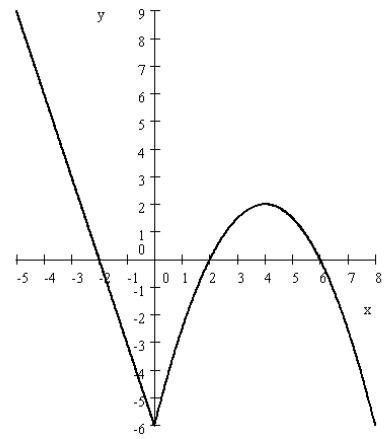
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada questão, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais apenas uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais que uma letra ou esta for ilegível, a questão será anulada.
- As respostas incorrectas terão cotação nula.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Considere a função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}$.

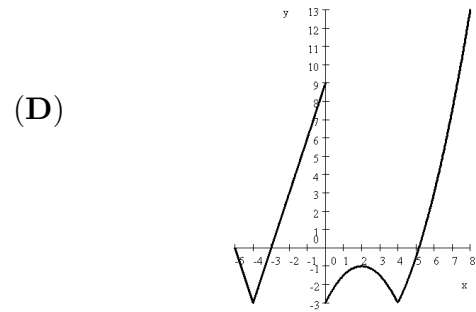
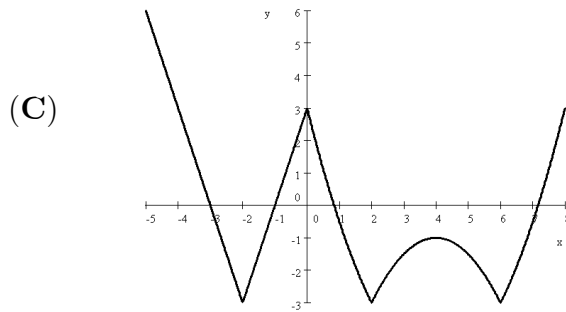
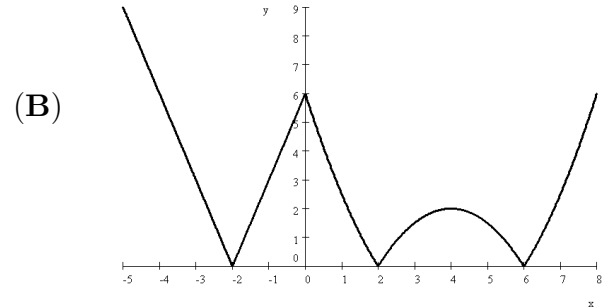
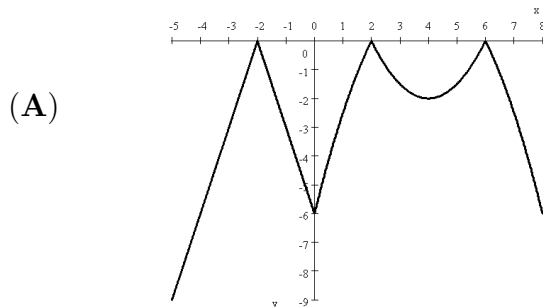
Qual dos gráficos seguintes representa a função f , num referencial o.n. xOy ?



2. A figura ao lado representa, num referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função real de variável real g .



Qual dos gráficos seguintes representa a função real de variável real h definida por $h(x) = |g(x)| - 3$?



3. Da função afim f , sabe-se que $f(0) = 3$ e $f(1) = -2$.

A expressão analítica da função afim f é:

- (A) $y = -5x + 3$. (B) $y = -2x + 3$.
 (C) $y = 3x - 2$. (D) $y = 5x + 3$.

4. O domínio da função real de variável real g definida por $g(x) = \frac{1 + \sqrt{8 - x}}{(x + 1)(x^2 - x + 2)}$ é:

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(B) $[8, +\infty[$.

(C) $] -\infty, 8[\setminus \{-1\}$.

(D) $] -\infty, 8[\setminus \{-1\}$.

5. Seja h a função real de variável real definida por $h(x) = 2e^x - 1$, onde e designa o número de Neper.

O conjunto solução da condição $h(x) > 0$ é:

(A) \mathbb{R} .

(B) $] -\ln 2, +\infty[$.

(C) $] -\infty, \ln 2]$.

(D) $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

6. Seja f a função real de domínio \mathbb{R}^+ definida por $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$, onde \ln designa o logaritmo de base e .

A função derivada de f é definida por:

(A) $f'(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2}$.

(B) $f'(x) = \frac{\ln x - 2}{x^2}$.

(C) $f'(x) = \ln x - 2$.

(D) $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.

7. Seja α um ângulo agudo tal que $\tan \alpha = \sqrt{5}$.

O valor da expressão $\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha$ é igual a:

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{5}{6}$.

(C) $\frac{2}{5}$.

(D) $\frac{7}{6}$.

Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que efectuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode recorrer à sua máquina de calcular para efectuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Considere as seguintes funções reais de variável real:

- a função cúbica f definida por $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$;
- a função racional g definida por $g(x) = \frac{f(x)}{(x^2 - 4)(x - 3)}$.

- (a) Indique os domínios, D_f e D_g , das funções f e g , respectivamente.
- (b) Determine $f(-2)$ e estude o sinal da função f .
- (c) Recorde que uma função real de variável real F é injectiva se e somente se

$$\forall x_1, x_2 \in D_F, x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$$

onde D_F designa o domínio de F .

A função f é injectiva? Justifique a sua resposta.

- (d) Mostre que

$$g(x) = \frac{x + 5}{x - 2}, \quad \forall x \in D_g.$$

- (e) Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.
- (f) Indique todos os valores de $x \in D_g$ que verificam a condição $g(-x) \geq \frac{2}{4 - x^2}$.

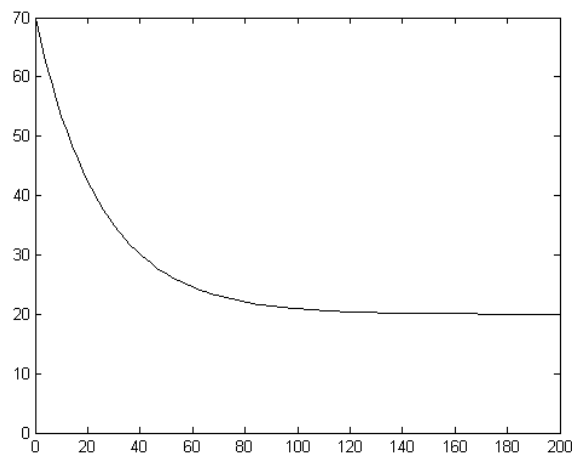
2. Numa pastelaria da cidade de Leiria, a temperatura ambiente é sempre constante.

Admita que a temperatura, em graus Celsius, de um chá servido nessa pastelaria, t minutos após ter sido colocado na chávena, é dado por

$$g(t) = 20 + 50e^{-0,04t}, \quad t \in [0, +\infty[$$

onde e designa o número de Neper.

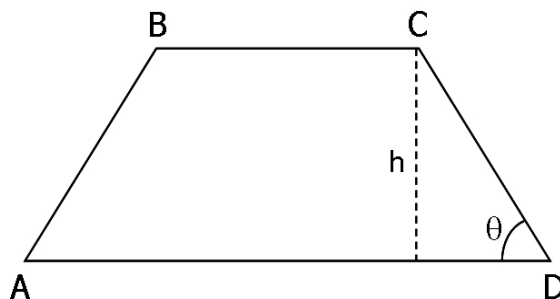
A figura seguinte ilustra o gráfico da função g , nos primeiros 200 minutos.



- (a) Determine um valor aproximado, com duas casas decimais, da temperatura do chá ao fim de 3 minutos após ter sido colocado na chávena.
- (b) Com o decorrer do tempo, a temperatura do chá tende a igualar a temperatura ambiente da pastelaria. Indique, justificando, a temperatura ambiente da pastelaria.
- (c) Justifique a seguinte afirmação: "*a taxa de variação média da função g , em qualquer intervalo do seu domínio, é negativa*".
- (d) Quanto tempo decorre entre o instante em que o chá é colocado na chávena e o instante em que a sua temperatura atinge os 65°C ? Apresente o resultado em minutos e segundos.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo três casas decimais.

3. A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2$ dm.



Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC :

- (a) Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ .
(b) Mostre que a **área** do trapézio é dada, em função de θ , por

$$F(\theta) = 4 \sin \theta + 2 \sin(2\theta).$$

- (c) Para determinar o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima, o fabricante tem que resolver a equação

$$4 \cos \theta + 4 \cos(2\theta) = 0. \tag{1}$$

Resolva a equação (1) e indique o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima. Em seguida, determine o valor dessa área.

FORMULÁRIO

Regras de derivação

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(u^k)' = k u^{k-1} u', \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(a^u)' = u'a^u \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Trigonometria

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Cotações

Grupo I	70
Cada resposta certa	10
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0
 Grupo II	 130
1.	60
a.	8
b.	14
c.	6
d.	6
e.	12
f.	14
2.	35
a.	6
b.	5
c.	10
d.	14
3.	35
a.	10
b.	10
c.	15