NÚMEROS E OPERAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Hugo Alexandre Lopes Menino

Edição

POLITÉCNICO DE LEIRIA
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS SOCIAIS

Apoios

Ci&DEI
Centro de Ciências da Educação e Inovação
Centro de Ciências da Educação e Inovação

fct
Fundação para a Ciência e a Tecnologia

NÚMEROS E OPERAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Hugo Alexandre Lopes Menino

Ficha Técnica

Título: Números e operações para a educação básica

Autor: Hugo Alexandre Lopes Menino

Revisor: Dina dos Santos Tavares

Capa: João Pinheiro, CRM/ESECS

Edição: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais
Instituto Politécnico de Leiria

Conceção gráfica: Patrícia Santos, Relgráfica, Lda.

Produção: Relgráfica, Lda.
www.relgra ica.com

Financiamento: CI&DEI — Centro de Estudos em Educação e Inovação
FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia

DOI: https://doi.org/10.25766/a7m7-4j25

Data: novembro 2023

Este trabalho é cofinanciado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., no âmbito do projeto Ref.ª UIDB/05507/2020. Agradecemos adicionalmente ao Centro de Estudos em Educação e Inovação (CI&DEI) e ao Politécnico de Leiria pelo apoio prestado.

ÍNDICE

Agradecimentos 05

Prefácio 07

Introdução 11

Capítulo I -Sistemas de Numeração 13
1.1. Definição de sistema de numeração 14
1.2. Classificação dos sistemas de numeração 14
1.2.1 Sistemas de numeração de agrupamentos simples 15
Tarefa 1 15
Tarefa 2 17
Tarefa 3 20
1.2.2. Sistemas de numeração posicionais 21
Tarefa 4 25
Tarefa 5 28
1.3. Base de um sistema de numeração 30
1.3.1. Contagens em diferentes bases 30
Tarefa 6 34
Tarefa 7 36
1.3.2. Mudança de base 37
Tarefa 8 41
Exercícios e problemas resolvidos 42
Exercícios e problemas globais 46

Capítulo II -Conjuntos Numéricos 57
2.1. Números naturais 58
Tarefa 9 59
2.1.1. Múltiplos e divisores de um número natural 60
Tarefa 10 62
2.1.2. Números primos e números compostos 63
Tarefa 11 66
2.1.3. Critérios de divisibilidade 67
Tarefa 12 72
2.1.4. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum 73
Tarefa 13 77
2.2. Números inteiros 79

2.2.1. Operações com números inteiros 80
2.3. Números racionais 82
2.3.1. Frações 83
2.3.2 Operações entre números racionais 86
2.3.3. Dízimas 86
2.3.4. Densidade 88
Tarefa 14 89
2.4. Números reais 93
Exercícios e problemas resolvidos 98
Excercícios e problemas globais 102

Capítulo 3 - Operações nos primeiros anos 113
3.1. Adição e subtração 115
3.1.1 Sentidos da adição e da subtração 115
3.1.2. Cálculo mental e escrito na adição e subtração 117
3.1.3. Algoritmos para a adição e subtração 124
Tarefa 15 126
3.2. Multiplicação 129
3.2.1. Sentidos da multiplicação 129
3.2.2. Cálculo mental e escrito na multiplicação 134
3.2.3. Algoritmos para a multiplicação 138
Tarefa 16 143
3.3. Divisão 145
3.3.1. Sentidos da divisão 145
3.3.2. Cálculo mental e escrito na divisão 149
3.3.3. Algoritmos para a divisão 151
Tarefa 17 157
Exercícios e problemas globais 158

Bibliografia 163

AGRADECIMENTOS

Um agradecimento a todos os estudantes e a todos os professores com quem, ao longo dos anos, tive oportunidade de partilhar saberes e experiências e que muito contribuíram para o conteúdo deste livro.
Um agradecimento a todos os colegas de departamento com quem cresci, aprendi e investiguei, ao longo de mais de duas décadas de docência no ensino superior e, em particular, à Professora Doutora Dina Tavares, pela revisão atenta e crítica de cada um dos capítulos deste livro.
Um agradecimento à minha família pelo apoio incondicional e por darem sentido ao que faço e ao que sou.

PREFÁCIO

O objetivo desta publicação é claro e definido pelo seu autor, Hugo Menino, na introdução: um contributo para a formação inicial e contínua de professores dos primeiros anos de escolaridade, neste caso 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Eu diria que esse objetivo é bastante conseguido para o 1.º ciclo, deixando as raízes para se seguir uma nova publicação para o 2.º ciclo, aprofundando o mesmo tema, "*Aprendizagem dos números e operações*", no âmbito dos números racionais. Desafio que deixo ao autor, pois acredito nas suas competências para o conseguir.

Tendo em conta a importância que o autor atribui, e bem, à exploração da Matemática em articulação com a sua história, a que voltarei mais tarde, talvez um pouco de história acerca da formação inicial dos professores dos primeiros anos de escolaridade também ajude a perceber o tempo em que surge este livro.

Os professores do 1.º ciclo da minha geração estão agora todos aposentados. Muitos deles aposentaram-se bastante cedo, em termos de idade, estando uma das causas relacionada com a sua formação inicial: o 5.º ano liceal (equivalente ao atual 9.º ano de escolaridade) e uma formação posterior de dois anos nas Escolas de Magistério Primário. Daí que iniciassem a sua atividade profissional (em escolas com condições difíceis) a partir dos 19/20 anos de idade. Claro que mais tarde, esta formação, pouco complementada com formação contínua, foi sendo sentida como insuficiente para lecionar todas as áreas curriculares de forma articulada nos primeiros anos de escolaridade E tal foi reconhecido ainda antes do 25 de abril, nomeadamente pelo então Ministro da Educação Veiga Simão, que criou o decreto para o nascimento das Escolas Superiores de Educação (integradas em Institutos Politécnicos), substituindo as Escolas de Magistério Primário, e com um currículo de formação com duração superior. O objetivo foi permitir o aprofundamento das temáticas objeto de ensino dos futuros professores, no pressuposto de 6 anos de escolaridade obrigatória. Além disso, passou a ser exigido o antigo 7.º ano liceal e depois o ensino secundário completo para entrada nessas escolas. Mas só depois do 25 de abril de 74 foi possível concretizar esse objetivo na formação inicial de professores.

As Escolas Superiores de Educação foram fazendo o seu caminho, que começou em meados dos anos 80, procurando definir currículos para a formação inicial com o melhor equilíbrio entre a componente das Ciências da Educação e a componente que abrange todo o conhecimento científico e didático dos vários conteúdos que fazem parte de todo o currículo do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, sempre com a preocupação de articular o conhecimento sobre o que se vai ensinar e o como ensinar.

A Matemática, como ciência estruturante do pensamento, e a sua didática, também teve de percorrer o seu caminho para se afirmar nos currículos das Escolas Superiores, pois para alguns, nos conselhos científicos das instituições, não era desse conhecimento que mais necessitavam os alunos, sendo, por vezes, referido que estes alunos, com 12 anos de escolaridade, "de Matemática, já eles sabem muito". Mas que sabiam esses alunos do papel desempenhado pela Matemática ao longo das civilizações, bem como da sua evolução, para melhor compreender o seu papel no mundo e assim melhor motivar os alunos para descobrirem este mundo tão fascinante? E, nessa formação de 12 anos, que conhecimento tinham eles sobre o como ensinar? Como selecionar materiais, construir tarefas para os alunos, que proporcionem uma aprendizagem com compreensão? Como conseguir um contexto para a aprendizagem, com uma comunicação adequada, com múltiplas representações de ideias e procedimentos matemáticos?

O autor deste livro teve uma formação inicial em que algumas destas preocupações já se faziam sentir e todo o seu percurso profissional e académico, como professor-investigador reflexivo na instituição que o formou, levou a um amadurecimento sobre todos os aspetos anteriormente referidos e outros que são apresentados neste livro. Há quem diga que o objetivo da formação de professores é "iluminar caminhos"; estou, pois, certa que este livro é uma boa fonte de energia verde para os caminhos que os professores dos primeiros anos vão percorrendo.

Relativamente a cada capítulo, direi que o primeiro me seduziu logo para as leituras seguintes. Explorar a Matemática através da sua história, e construir tarefas adequadas a alunos dos primeiros anos, que os ponham em contacto com o passado e, ao mesmo tempo, promovam o seu envolvimento ativo na exploração dessas tarefas, não é fácil. Mas é muito importante, pois permite entender a Matemática como uma

atividade humana permanente que atravessou civilizações. A evolução dos símbolos utilizados para representar os algarismos, dos diversos sistemas de numeração e a sua comparação até se chegar ao sistema hoje utilizado, a partir de textos históricos, está bem documentada neste livro.

Esta presença da história da Matemática continua na seção dos N*úmeros irracionais* do capítulo 2, com a abordagem a dois dos números irracionais mais importantes, o número Pi e o número de ouro. E esta abordagem continua no terceiro capítulo, *Operações nos primeiros anos*, em que destaco a referência à multiplicação e divisão egípcias, que proporciona contextos para os alunos investigarem e aprenderem Matemática. Que bom colocar os alunos perante tarefas que despertem a sua curiosidade e os levem a colocar hipóteses e a verificá-las! É o caso da multiplicação egípcia referida no livro, em que os alunos terão de especular com as suas intuições como é que os egípcios efetuavam todas as multiplicações, multiplicando apenas por 2 e por 1. É uma verdadeira atividade de investigação e é a partir desta ideia que salientarei outros aspetos didáticos que estão presentes neste livro.

O autor refere na introdução a sua perspetiva para a formação de professores na área da educação matemática, rejeitando, e bem, a lógica aditiva (conhecimento matemático primeiro e depois conhecimento didático), optando pela conexão entre os dois tipos de conhecimento. O professor tem de ter um conhecimento profundo dos conceitos e procedimentos matemáticos, mas tal não é suficiente se não selecionar e/ou construir tarefas adequadas aos seus alunos, tarefas que deem ênfase às conexões entre, por um lado, os temas matemáticos, as diversas representações de ideias matemáticas, e, por outro, o quotidiano dos alunos, as outras *áreas curriculares (tão importantes nos anos em que prevalece o regime de monodocência)* e o mundo real.

Diria que, na generalidade, as tarefas propostas têm estas preocupações didáticas. Basta atender a certa terminologia usada nas propostas — *analisa, discute estas estratégias de resolução do problema, antecipa outras estratégias, investiga e explica o teu raciocínio, representa, formula um problema que…, mostra que …, comenta a seguinte afirmação* —, bem diferente de uma terminologia quase reduzida a *calcula, efetua*.

Para finalizar, gostaria de destacar que o terceiro capítulo mostra a

influência que o projeto de investigação *Desenvolvendo o sentido do número: perspetivas e exigências curriculares (DSN)* teve e continua a ter no desenvolvimento profissional de todos nós como formadores de professores, projeto apoiado pela FCT, em que o autor participou ativamente como investigador, com outros colegas da ESECS/IPLeiria, ESE/IPLisboa e ESE/IPSetúbal, a convite da coordenadora do projeto, Joana Brocardo, da Escola Superior de Educação de Setúbal.

Maria Isabel Azevedo Rocha

INTRODUÇÃO

Este livro pretende ser uma ferramenta de trabalho com utilidade para a formação inicial e contínua de professores dos primeiros anos da Educação Básica, em particular no âmbito do trabalho desenvolvido no estudo dos números e operações.

Na Educação Básica e pensando mais especificamente nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, a formação de professores deve, na nossa perspetiva, ser feita numa lógica de aprofundamento conceptual ao nível do conhecimento sobre aquilo que é objeto de ensino e aprendizagem, mas também ao nível do aprofundamento didático relativamente à forma como as crianças aprendem matemática e à forma como esta deve ser ensinada. Acreditamos que o trabalho na formação de professores destes anos deve ser feito, não numa lógica aditiva, no sentido em que primeiro aprendem matemática e depois aprendem formas de promover aprendizagens em matemática nos seus alunos, mas antes numa lógica de inter-relação das duas dimensões.

Os professores em formação, inicial e contínua, precisam de compreender a relevância de uma formação matemática sólida, que se traduzirá na melhoria das aprendizagens dos alunos, bem como no desenvolvimento de atitudes positivas relativamente à matemática. A formação em matemática deve ser perspetivada em termos do proveito que dela podem fazer para o exercício da sua profissão. Isto significa que deve existir uma preocupação sistemática em aprofundar de um ponto de vista superior a matemática elementar, mas a matemática elementar pode e deve ser, sempre que possível, o ponto de partida para o trabalho que é realizado no contexto de formação de professores. Esta opção é aqui assumida e justifica as opções feitas na forma como os diferentes temas são apresentados e aprofundados.

Adicionalmente, houve a preocupação em evidenciar a importância do uso de uma linguagem matemática adequada, incluindo aspetos específicos da sua terminologia, não só por uma questão de rigor, mas também para evidenciar a sua importância para uma compreensão significativa da matemática.

Na estrutura do livro, organizado em 3 capítulos, procurou-se iniciar com uma abordagem aos sistemas de numeração, no primeiro capí-

tulo, dando ênfase a aspetos históricos que ajudam a compreender, numa perspetiva contextualizada e comparativa, as suas caraterísticas e aspetos distintivos. Simultaneamente, as tarefas propostas permitem aprofundar conceitos e ferramentas do cálculo e da álgebra. Na nossa perspetiva, esta abordagem é rica, potenciando uma compreensão mais profunda, em particular, das potencialidades de um sistema de numeração posicional e ajudando desde o início a perspetivar as implicações didáticas do estudo do sistema de numeração posicional indo-árabe de base 10, pelas crianças.

O segundo capítulo incide sobre o estudo dos universos numéricos, partindo do conjunto dos números naturais, ampliando-o ao conjunto dos números inteiros, depois ao conjunto dos números racionais e, finalmente, ao conjunto dos números reais. Procurou-se clarificar conceitos importantes para a Educação Básica, de um ponto de vista superior, evitando, contudo, uma formalização excessiva, sempre que se considerou que esta não era fundamental para a compreensão dos aspetos teóricos abordados.

O terceiro e último capítulo dedica-se ao estudo das quatro operações elementares, no universo dos números naturais. É um capítulo com uma forte preocupação didática, dedicado por isso à discussão de aspetos muito centrados no processo de ensino e aprendizagem dos números e operações.

Cada capítulo inclui, ao longo do texto, várias tarefas propostas, que procuram ilustrar ou aprofundar os aspetos apresentados e que podem ser utilizadas, num contexto de formação, para a exploração dos conceitos, conduzindo a atividades de sala de aula que fomentem a discussão de ideias matemáticas. Para alguns tópicos elaborou-se também uma secção de exercícios e problemas resolvidos. No final de cada um dos capítulos, apresentam-se tarefas complementares, algumas de caráter mais globalizante e que estabelecem conexões dentro da matemática (conexões internas) ou com a realidade (conexões externas).

CAPÍTULO I

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

A matemática terá surgido há milhares de anos, no período paleolítico, associada a necessidades da vida quotidiana como por exemplo contar o número de animais que se caçavam. Nestes primórdios da contagem pensa-se que se usavam termos muito simples como um, dois e muitos (Struik, 1948). O período neolítico terá estimulado o desenvolvimento da linguagem em associação a contagens simples, necessárias, por exemplo, para as trocas comerciais. "Os registos relativos às transações eram frequentemente conservados através de entalhes num pau ou marcas em placas de argila, constituindo um primeiro esboço de escrita matemática, em que os números eram concebidos exclusivamente para efetuar contagens" (Sequeira, Freitas e Nápoles, 2009, p.11). Quando o conceito de número se foi alargando, os números maiores foram representados numa lógica aditiva. Por exemplo, trabalhos antropológicos com a tribo australiana Kamilaroi, mostram o uso da seguinte sequência numérica: 1 = mal, 2 = bulan, 3 = guliba, 4 = bulan bulan, 5 = bulan gulida e 6 = guliba guliba (Struik, 1948). Tal como aconteceu com a língua falada e escrita, historicamente, diferentes povos e civilizações desenvolveram diferentes sistemas de numeração com caraterísticas próprias. Neste capítulo apresenta-se uma classificação para os sistemas de numeração, ilustrada por alguns exemplos. Considera-se que, esses exemplos, apesar de não serem representativos da imensa diversidade de sistemas que existiram ao longo da história, apresentam relevância para a formação dos professores.

1.1. Definição de sistema de numeração

Um **sistema de numeração** define um conjunto de símbolos que são dispostos segundo determinadas regras para representar números. Assim, um sistema de numeração permite representar números de uma forma coerente, dando a cada um deles uma representação única.

1.2. Classificação dos sistemas de numeração

Do ponto de vista histórico é possível identificar sistemas muito diversos não só pelos símbolos utilizados, mas sobretudo pela lógica de construção da sequência numérica subjacente a cada um dos sistemas. Apesar

dessa diversidade, os sistemas de numeração são classificados em dois grandes grupos, os **sistemas de agrupamento simples** e os **sistemas posicionais**. Esta classificação assenta num princípio distintivo essencial: os símbolos têm ou não um valor posicional na representação (numeral). Quando os símbolos têm valor posicional, o sistema diz-se posicional, quando não têm, o sistema diz-se de agrupamento simples.

1.2.1. Sistemas de numeração de agrupamento simples

Num sistema de agrupamento simples os símbolos assumem sempre o seu valor próprio (ou intrínseco) e podem ser repetidos o número de vezes necessárias para representar o número, sendo irrelevante a posição que ocupam num numeral. Isto não significa que a ordem de representação de símbolos, de valor diferente, seja irrelevante, mas significa que essa ordem não determina a consideração de qualquer valor posicional, como veremos em exemplos apresentados mais à frente.

TAREFA 1

1. Considere um hipotético sistema de numeração de agrupamento simples que usa os símbolos indicados na tabela e em que um símbolo de maior valor tem de ficar à esquerda de um de menor valor. **Escreva** nesse sistema os números:

Símbolo	Valor intrínseco
|	1
Π	5
∧	10
□	100

a) 6

b) 16

c) 36

d) 222

O exemplo do sistema de numeração egípcio

Um dos mais antigos sistemas de agrupamento simples é o sistema egípcio. Este sistema usa um conjunto de sete símbolos, cujos valores próprios são potências de dez: $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$, $10^5=100000$ e $10^6=1000000$. Não existia símbolo para representar o zero. O quadro 1 apresenta a correspondência entre os símbolos utilizados, o seu significado e o seu valor.

Símbolo							
Significado	Bastão	Osso de calcanhar	Corda enrolada	Flor de lótus	Dedo a apontar	Rã	Homem espantado
Valor	1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Quadro 1 – Símbolos do sistema de numeração egípcio

Para escrever um número no sistema de numeração egípcio repetimos os símbolos o número de vezes necessárias para representar a quantidade que queremos, começando com o símbolo de maior valor. Relembra-se que neste sistema de numeração cada símbolo só assume o seu valor próprio, valor esse que não é alterado pela posição relativa que ocupa no numeral. Isto significa que para identificar o número que está representado basta adicionar o valor de todos os símbolos.

Reparemos no número representado na figura 1. Podemos observar que o primeiro símbolo é um homem espantado que vale 1000000; seguindo-se 3 rãs que valem, no conjunto, 300000 (100000 + 100000 + 100000); depois temos 3 dedos a apontar que valem, no conjunto, 30000 (10000 + 10000 + 10000); seguem-se 3 flores de lótus cujo valor total é 3000 (1000 + 1000 + 1000); depois temos 3 cordas enroladas que valem, no conjunto, 300 (100 + 100 + 100); e, finalmente, vemos 3 ossos de calcanhar, cujo valor total é 30 (10 + 10 + 10); não está representado nenhum bastão. Adicionando todos os valores verificamos que temos a representação do número um milhão, trezentos e trinta e três mil, trezentos e trinta.

Figura 1 – Representação do número 1333330, talhada em pedra (fonte: https://discoveringegypt.com)

Em síntese, no sistema de numeração egípcio:

- O valor de cada símbolo não varia com a posição que ocupa no numeral;
- Na escrita dos símbolos, começa-se pelo símbolo de maior valor, acrescentando sucessivamente os de menor valor, por ordem decrescente;
- Não existe símbolo para o zero;
- Cada símbolo pode ser repetido até 9 vezes;
- O número representado resulta da adição sucessiva do valor de cada um dos símbolos.

TAREFA 2

1. Determine o número representado pelo sistema de numeração egípcio.

a)		
b)		
c)		

2. Utilizando o sistema de numeração egípcio **represente** os seguintes números:

a)	6	
b)	18	
c)	43	
d)	125	
e)	449	
f)	1252	

O exemplo do sistema de numeração romano

Outro exemplo de sistema de agrupamento simples é o sistema de numeração romano. Ainda hoje, em particular na realidade europeia, existem contextos onde se recorre ao uso de números escritos neste sistema de numeração, naturalmente por razões históricas. Por exemplo, na contagem do tempo cronológico, os séculos são identificados com números romanos.

O sistema de numeração romano usava 7 símbolos, 4 símbolos principais e 3 símbolos secundários. Os **símbolos principais** correspondem a potências de 10 (10^0=1, 10^1=10, 10^2=100 e 10^3=1000). Os **símbolos secundários** representavam as quantidades 5, 50 e 500. Tal como no sistema egípcio não existe símbolo para o zero. O quadro 2 sistematiza a correspondência entre os algarismos romanos e o seu valor.

Símbolos principais				Símbolos secundários		
I	X	C	M	V	L	D
1	10	100	1000	5	50	500

Quadro 2 – Símbolos usados no sistema de numeração romano

Para escrever um número no sistema de numeração romano temos de considerar dois princípios complementares, o **princípio aditivo** e o **princípio subtrativo**. Por um lado, o princípio aditivo define que, quando temos um símbolo à direita de outro de maior valor, os seus valores adicionam-se. Por exemplo XVI = 10+5+1 = 16. Por outro lado, o princípio subtrativo define que, quando temos um símbolo à esquerda de outro de maior valor, ao valor do que representa o maior se subtrai o valor do que representa o menor. Por exemplo, IV = 5-1 = 4. Adicionalmente, neste sistema nenhum símbolo se pode repetir mais do que três vezes. Vejamos a sequência dos 100 primeiros números romanos, no quadro 3.

1 = I	21 = XXI	41 = XLI	61 = LXI	81 = LXXXI
2 = II	22 = XXII	42 = XLII	62 = LXII	82 = LXXXII
3 = III	23 = XXIII	43 = XLIII	63 = LXIII	83 = LXXXIII
4 = IV	24 = XXIV	44 = XLIV	64 = LXIV	84 = LXXXIV
5 = V	25 = XXV	45 = XLV	65 = LXV	85 = LXXXV
6 = VI	26 = XXVI	46 = XLVI	66 = LXVI	86 = LXXXVI
7 = VII	27 = XXVII	47 = XLVII	67 = LXVII	87 = LXXXVII
8 = VIII	28 = XXVIII	48 = XLVIII	68 = LXVIII	88 = LXXXVIII
9 = IX	29 = XXIX	49 = XLIX	69 = LXIX	89 = LXXXIX
10 = X	30 = XXX	50 = L	70 = LXX	90 = XC
11 = XI	31 = XXXI	51 = LI	71 = LXXI	91 = XCI
12 = XII	32 = XXXII	52 = LII	72 = LXXII	92 = XCII
13 = XIII	33 = XXXIII	53 = LIII	73 = LXXIII	93 = XCIII
14 = XIV	34 = XXXIV	54 = LIV	74 = LXXIV	94 = XCIV
15 = XV	35 = XXXV	55 = LV	75 = LXXV	95 = XCV
16 = XVI	36 = XXXVI	56 = LVI	76 = LXXVI	96 = XCVI
17 = XVII	37 = XXXVII	57 = LVII	77 = LXXVII	97 = XCVII
18 = XVIII	38 = XXXVIII	58 = LVIII	78 = LXXVIII	98 = XCVIII
19 = XIX	39 = XXXIX	59 = LIX	79 = LXXIX	99 = XCIX
20 = XX	40 = XL	60 = LX	80 = LXXX	100 = C

Quadro 3 – Números romanos de 1 a 100.

TAREFA 3

1. **Escreva**, em numeração romana, os seguintes números:

a)	120	
b)	369	
c)	409	
d)	2025	
e)	939	
f)	899	

2. Considere o número romano CXLVIII. **Escreva** no sistema romano:

a) o seu sucessor.

b) o número que se obtém se lhe adicionarmos 2.

c) o número que se obtém se lhe adicionarmos 20.

1.2.2. Sistemas de numeração posicionais

Num sistema de numeração **posicional**, cada símbolo, num numeral, tem um **valor próprio** (ou intrínseco) e um **valor posicional** que lhe é conferido pela posição relativa que ocupa relativamente aos outros símbolos do numeral. Isto é, um símbolo adquire um valor posicional em função da sua ordem no numeral. Se considerarmos os números 11 e 111, do sistema indo-árabe, que usamos quotidianamente, reparamos que o símbolo que usamos é sempre o 1, contudo, estes representam valores diferentes, dependendo da sua ordem. Detalhadamente podemos escrever:

11 = 1x10 + 1 **111 = 1x100 + 1x10 + 1**

Quando o algarismo 1 ocupa a ordem das unidades, vale 1, que é o seu valor próprio. Contudo, quando o algarismo 1 ocupa a ordem das dezenas vale 10 vezes o seu valor próprio. Já quando o 1 ocupa a ordem das centenas vale 100 vezes o seu valor próprio.

Num sistema de numeração posicional, a existência do **zero** é fundamental, porque é este símbolo que permite assinalar uma ordem vazia, evitando quaisquer ambiguidades na leitura e identificação de um número. Poderíamos perguntar: sem a existência de um símbolo para o zero, como poderíamos distinguir o número 202 do número 22? Nesta situação, no número 202, é o zero que assinala a segunda ordem, o que faz com que saibamos de forma imediata que o 2 ocupa a terceira ordem e que vale 100 vezes o seu valor próprio.

O exemplo do sistema de numeração babilónico

Um dos sistemas de numeração mais antigos é o sistema de numeração babilónico que já estaria em uso na zona da mesopotâmia antes do fim do 3.º milénio a.C., essencialmente para funções de cálculo de quantidades de mercadorias e funções contabilísticas (Estrada, et. al. 2000).

O sistema de numeração babilónico era um sistema posicional com algumas limitações, a principal decorria do facto de não existir um símbolo para o zero. Usualmente era deixado um espaço em branco entre os sím-

bolos, quando não havia unidades de certa ordem. Contudo, esta estratégia de escrita podia gerar ambiguidades. A outra limitação resultava do facto do sistema usar unicamente dois símbolos: 𒁹 para 1 e 𒌋 para 10, o que fazia com o que sistema mantivesse uma lógica aditiva para representar as quantidades entre 1 e 59. O facto de não existir símbolo para o zero, significa que o mesmo símbolo (𒁹) sozinho, pode representar uma unidade ou 60 unidades ou qualquer outra potência de 60. Estas ambiguidades ou fragilidades do sistema não eram na realidade assim tão significativas uma vez que o contexto permitia, em regra, interpretar a ordem correta de cada símbolo ou conjunto de símbolos. Ainda assim, em alguns registos relativos a períodos mais tardios, surge um símbolo do tipo 𒌋𒌋 que assinala uma ordem vazia, mas nunca é usado na primeira ordem.

Mas afinal, como escreviam os babilónicos os números? Os números entre 1 e 59 eram escritos numa lógica aditiva, em tudo semelhante ao sistema de numeração egípcio, combinando grupos de 𒁹 (entre 1 e 9) e grupos de 𒌋 entre 1 e 5. Nas combinações destes símbolos, os símbolos de maior valor eram colocados à esquerda. A figura 2 apresenta a sequência dos primeiros numerais babilónicos.

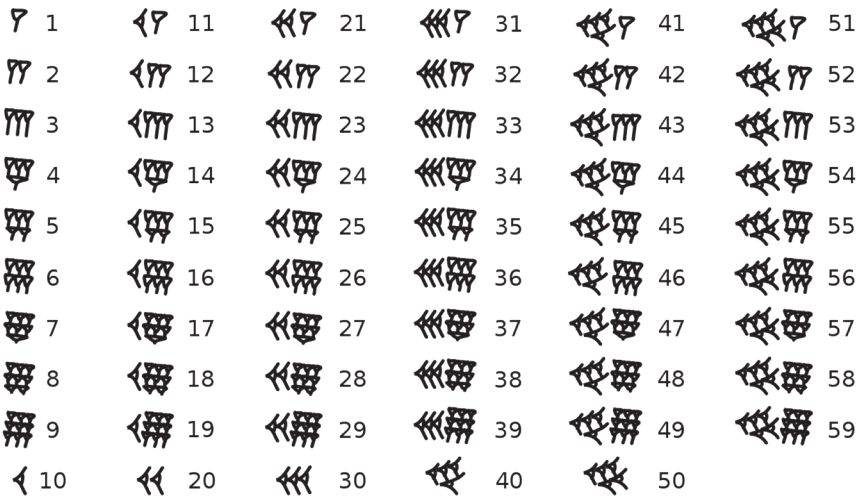


Figura 2 – Sequência dos números babilónicos entre 1 e 59. (Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Numera%C3%A7%C3%A3o_babil%C3 %B4nia)

Como já referimos, para representar a quantidade 60 os babilónicos usavam o símbolo unitário, sendo que a distinção entre 1 e 60 só poderia ser feita em contexto. A mesma ambiguidade existia para a distinção entre 2 e 120, 3 e 180 ou 4 e 240, entre outros.

A representação do número 70 é: , em que símbolo adquire o valor posicional 60. Assim pode ser interpretado como 1x60 + 10 = 70.

O número 71 era representado assim: = 1x60 + 11.

O número 72 era representado assim: = 1x60 + 12.

O conjunto de símbolos representa a quantidade 21x60 + 32 = 1292.

Como será que representaremos, por exemplo, o número 436 no sistema de numeração babilónico? Teremos de pensar nos agrupamentos possíveis, atendendo a que na primeira ordem podemos ter a representação de uma quantidade entre 1 e 59, na segunda ordem, a representação de uma quantidade entre 1 e 59, cujo valor próprio é multiplicado por 60, na terceira ordem, a representação de uma quantidade entre 1 e 59, cujo valor próprio é multiplicado 3600 (60^2). Verificamos que em 436 existem 7 grupos de 60 (7x60=420) e sobram 16, logo a representação seria a correspondente a 7x60 + 16:

A compreensão deste sistema de numeração deve-se, em grande medida, a Henry Rawlinson que, em 1855, estudou um achado arqueológico muito relevante, a placa de Larsa, cuja cópia da parte final pode ser encontrada em Estrada, et al. (2000) numa reprodução de uma transcrição parcial originalmente apresentada por Rawlinson, num artigo de 1855 (figura 3).

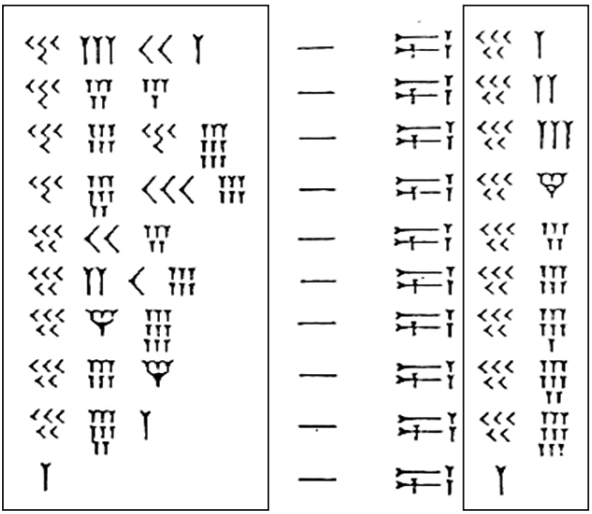


Figura 3 – Reprodução parcial da placa de Larsa (fonte: Estrada, et.al. 2000)

Se nos centrarmos nos dois conjuntos de símbolos assinalados pelos retângulos, verificamos que temos, em cada coluna, dez números. No conjunto mais à direita parece evidente que temos uma sequência de números, o primeiro é 51, o segundo 52 e assim sucessivamente até 60. Então que números estão representados na coluna mais à esquerda? Terão esses números alguma relação com os da coluna da direita?

De facto, se lermos o primeiro dos números da primeira coluna, temos: 43x60+21=2601, que é exatamente o quadrado de 51 que é o primeiro número da última coluna. Fica o desafio para que faça a verificação para os números das outras linhas. A placa de Larsa é, na realidade, uma tabela de quadrados perfeitos, usada provavelmente na formação de jovens escribas que as memorizavam, assim como tabelas de multiplicação, raízes quadradas e cúbicas, entre outras.

Nos dias de hoje, há duas marcas muito relevantes que remontam ao sistema babilónico, a medição da amplitude e a medição do tempo. A amplitude de um ângulo é medida em graus, entre 0º e 360º, sendo que a amplitude do ângulo giro (uma volta completa) é 360º (6x60º). Para medir o tempo, usamos agrupamentos que são feitos de 60 em 60: 1 hora tem 60 minutos e um minuto tem 60 segundos, logo 1 hora tem $60x60=60^2=3600$ segundos.

TAREFA 4

1. **Verifique** que, na placa de Larsa, a quinta linha representada estabelece de facto a correspondência entre 55 e o seu quadrado.

2. **Justifique** porque é que, na última linha representada, o símbolo para 50 é igual ao símbolo para representar o seu quadrado.

3. **Escreva** no sistema indo-árabe os seguintes números babilónicos.

a) →

b) →

4. **Escreva** em numeração babilónica, os números:

a) 130 →

b) 251 →

c) 631 →

O exemplo do sistema de numeração maia

A civilização pré-colombiana dos Maias, na América Central, foi uma civilização que se estabeleceu vários séculos a.C., teve o seu apogeu entre 250 d.C. e 900 d.C. e se manteve, apesar do forte declínio, até à chegada dos europeus (Coe & Houston, 2005).

As fontes relativamente à civilização e numeração maia são escassas. Contudo, sabemos que o sistema de numeração maia era um sistema de numeração posicional, que integrava um símbolo ovalado que representava o zero, , e um conjunto de 19 algarismos de primeira ordem, formados unicamente por pontos e traços. Vejamos os primeiros numerais do sistema na figura 4.

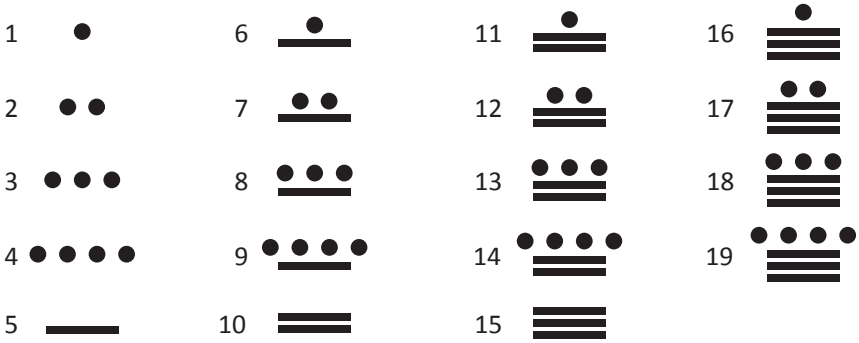


Figura 4 – Números maias de 1 a 19

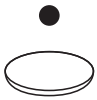


Figura 5 – Número 20 em numeração maia

A escrita da numeração maia era feita verticalmente, de baixo para cima. Para os números compostos por duas ordens o símbolo das unidades era colocado em baixo e o símbolo das vintenas era colocado acima. A figura 5 apresenta a representação da quantidade 20 no sistema maia. Nesta

representação temos o zero na primeira ordem, com valor zero, e o um na segunda ordem, com valor 20. Isto significa que, no sistema maia, os algarismos que ocupam a primeira ordem mantêm o seu valor próprio e os algarismos que ocupam a segunda ordem veem o seu valor próprio ser multiplicado por 20 (1x20 + 0).

Seria de esperar que nas ordens seguintes o fator multiplicador fosse uma potência de 20. Na terceira ordem o fator multiplicador seria 20^2=400, contudo há uma irregularidade nesta ordem; de facto na terceira ordem o fator multiplicador é 360. Vejamos o exemplo do número representado na figura 6.

6 x 360 = 2160

2 x 20 = 40

5

2160 + 40 + 5 = 2205

Figura 6 – Representação maia da quantidade 2205

Em virtude da irregularidade da terceira ordem, à quarta ordem correspondia, por sua vez, um fator multiplicador 7200 = 20 x 360 (e não 8000 = 20 x 20 x 20), à quinta posição correspondia um fator multiplicador 144000 = 20 x 7200 (e não 160000 = 20 x 20 x 20 x 20), e assim por diante.

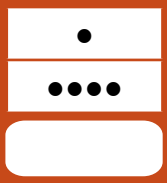
Esta opção relativamente ao valor posicional da terceira ordem teve origem na forma como os maias faziam a contagem do tempo. Tomando como referência a unidade dia, os dias eram agrupados em 18 meses de 20 dias e em anos de 360 dias. A contagem contemplava ainda ciclos de 20 anos que por sua vez eram agrupados em ciclos maiores obtidos das sucessivas potencias de 20.

TAREFA 5

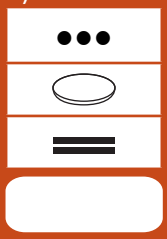
Nesta tarefa, considere uma simplificação do sistema de numeração maia e suponha que, nas diferentes ordens, o valor posicional dos símbolos é sempre uma potência de 20. Em suma, não considere a irregularidade da 3.ª ordem.

1. Identifique no sistema de numeração indo-árabe os números representados abaixo.

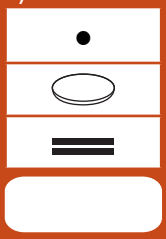
a)



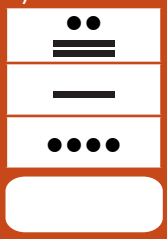
b)



c)



d)



2. **Escreva** no sistema maia simplificado os números seguintes.

a) b) c) d)

21 141 623 9645

3. **Faça** os seguintes números cruzados Maias. Depois **escreva** os horizontais no sistema de numeração indo-árabe.

Verticais

1. 8616
2. 8; 180
3. 246; 301
4. 160691
5. 230

	1	2	3	4	5
1	■				■
2		■			
3			■		
4					■
5		■			■

O exemplo do sistema de numeração indo-árabe

O sistema de numeração indo-árabe é o sistema de numeração mais usado no mundo, no século XXI. A designação do sistema encerra a importância de dois povos diferentes, um responsável pela sua invenção e o outro responsável pelo seu aperfeiçoamento e pela sua difusão. Este sistema terá tido a sua origem na Índia e era usado pelo povo hindu, pelo menos, desde o século VIII. Os árabes, que mantinham fortes relações comerciais com diferentes povos, incluindo os hindus, adotaram o sistema de numeração e difundiram-no por vastas regiões. O matemático árabe Al-Khowarism (778-846) foi responsável pela sua difusão na europa através do seu livro *Álgebra* que foi traduzido para latim. A palavra algarismo em português deriva precisamente do nome do matemático Al-Khowarism. Também Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci (1170-1250) terá tido um importante papel na difusão do sistema de numeração indo-árabe, através da publicação, no início do século XIII, do livro *Liber Abaci* (cálculo), onde descreve o sistema, discute a importância do zero num sistema posicional e assinala as potencialidades dum sistema deste tipo, nomeadamente ao nível do cálculo.

Os símbolos do sistema de numeração indo-árabe evoluíram graficamente ao longo do tempo, mantendo formas próximas das atuais desde o século XVI. Os símbolos usados são os dez algarismos que todos conhecemos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

O sistema de numeração indo-árabe é posicional, logo os símbolos, além do seu valor próprio, adquirem um valor posicional que lhe é conferido pela posição relativa que ocupam no numeral. Neste sistema, esse valor posicional é uma potência de 10. Se considerarmos o número 123, vejamos a decomposição polinomial do número:

$$123 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

Sabemos que o algarismo 1 ocupa a ordem das centenas, o algarismo 2, a ordem das dezenas e o algarismo 3, a ordem das unidades. De forma simplificada, o valor do 1 é o seu valor próprio multiplicado por 100, o valor do 2 é o seu valor próprio multiplicado por 10 e o valor do 3 é o seu valor próprio.

1.3. Base de um sistema de numeração

Num sistema de numeração posicional o conceito de base do sistema é central. Ainda que não referida explicitamente nas secções anteriores, este conceito estava subentendido em vários sistemas de numeração. Num sistema de numeração, a quantidade que na primeira ordem implica a formação de um agrupamento de segunda ordem é a **base do sistema de numeração**. Por exemplo, no sistema de numeração indo-árabe, a quantidade dez implica o reagrupamento das unidades para formar um grupo de segunda ordem (uma dezena), logo a base é 10. Repare-se que esta definição tem uma consequência: a base é igual ao conjunto de símbolos de primeira ordem que são utilizados. No exemplo do sistema indo-árabe a base é 10 e existem dez símbolos (os algarismos de 0 a 9). De facto, as duas ideias estão intimamente relacionadas porque quando se esgotam os símbolos na primeira ordem, tem de se fazer um agrupamento de segunda ordem.

A opção pela base 10 tem sobretudo razões de natureza antropomórfica (temos 10 dedos nas mãos). Contudo, ao longo da história de diferentes civilizações e povos encontramos referencias a outras bases, em particular a base 5 (baseada nos 5 dedos de uma mão), a base 20 (baseada nos dedos das mãos e dos pés), a base 12 (baseada nas falanges dos dedos de uma mão contados com a ajuda do polegar), a base 60 (cujas origens dividem os especialistas). Ainda que utilizemos um sistema de numeração de base 10, podemos observar vários usos que remetem para bases diferentes da base 10. Da base 12, a utilização do termo dúzia, a divisão do ano por 12 meses e a contagem das horas de um dia em dois grupos de 12. Da base 60, a divisão da hora em 60 minutos e do minuto em 60 segundos (aspetos já referidos em secção anterior sobre o sistema de numeração babilónico).

1.3.1. Contagens em diferentes bases

Matematicamente, qualquer número maior ou igual a 2 pode ser tomado para base. Um exemplo com uma importância extrema no mundo atual é a base 2, porque é a base da programação de um computador. Sem ela o computador não funcionaria, nem seria possível a interação entre o homem e a máquina.

Nas páginas seguintes procura-se apresentar a forma de construção da sequência de números em qualquer base. Tomemos como exemplo o conjunto de quadrados da figura 7 para proceder à sua contagem em diferentes bases.

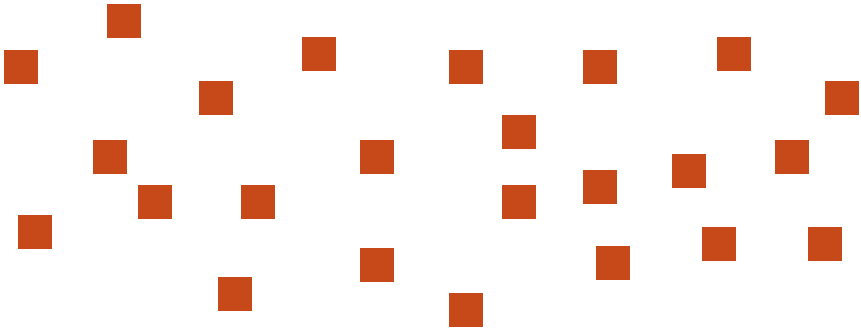


Figura 7 – Vinte e quatro quadrados dispersos

Depois de efetuar corretamente a contagem, podemos afirmar que há 24 quadrados na figura. Contudo, apesar de termos representado essa quantidade de quadrados por um 2 seguido de um 4, observamos que não há, no conjunto, o menor vestígio das quantidades representadas por esses dois algarismos. Por que razão é que esta quantidade se representa por 24? De facto, num sistema de base 10, a contagem destes objetos tem subjacente uma organização em duas dezenas e quatro unidades (2 grupos de 10 + 4), como vemos na figura 8.

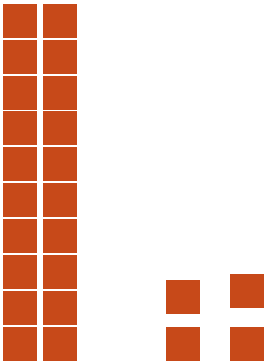


Figura 8 – Representação do número 24 na base 10

É importante salientar que, matematicamente, não há nada que nos obrigue a fazer os agrupamentos na base 10. Aliás é interessante analisar como será a organização desta contagem numa base inferior ou numa base superior a 10. Vamos considerar os exemplos da base 5 e da base 12 para fazer esta contagem. Mas antes, usemos a definição de base para pensar que símbolos iremos usar. Se a base é 5 existem 5 símbolos (1, 2, 3, 4 e 0); se a base é 12 existem 12 símbolos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 0). Na base 12, precisamos de 2 símbolos que não existem na base 10, são por isso símbolos arbitrários. Decidiu-se usar sucessivamente as letras do alfabeto para representar quantidades maiores que nove.

Quando faço a contagem na base 5, conto 1 quadrado, 2 quadrados, 3 quadrados, 4 quadrados e, quando conto mais 1, não tenho um símbolo único para registar a quantidade, tenho de fazer um grupo de 5 unidades, que represento por 10. Para saber que 10 está escrito na base 5, posso escrever $10_{(5)}$. Note que $10_{(5)} = 1x5 + 0 = 5_{(10)}$. No número $10_{(5)}$, o algarismo 1 ocupa a segunda ordem, logo vale 5, porque a base é 5 e o algarismo 0 ocupa a primeira ordem e vale, obviamente, zero. Contando mais um quadrado fico com $11_{(5)}$; conto mais um e fico com $12_{(5)}$ e assim sucessivamente. A figura 9 ilustra esta contagem sucessiva.

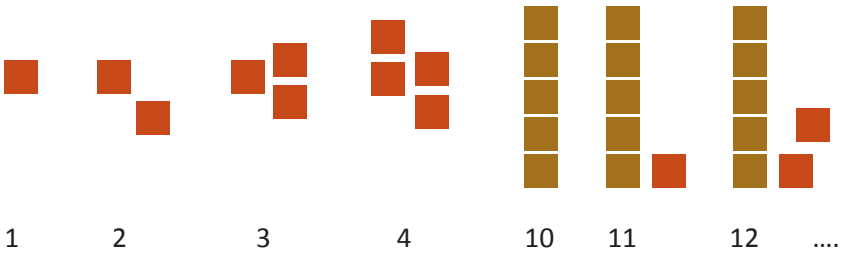


Figura 9 – Início da contagem dos quadrados na base 5

O quadro 4 procura apresentar, de forma sistemática, a contagem dos quadrados da figura 7 na base 10, na base 5 e na base 12. Podemos ver a equivalência das diferentes representações, nas três bases consideradas.

Base 10	Base 5	Base 12
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	**10** (1 grupo de 5)	5
6	11 (1 grupo de 5 mais 1)	6
7	12	7
8	13	8
9	14	9
10 (1 grupo de 10)	**20** (2 grupos de 5)	A
11 (1 grupo de 10 mais 1)	21	B
12	22	**10** (1 grupo de 12)
13	23	11 (1 grupo de 12 mais 1)
14	24	12
15	**30** (3 grupos de 5)	13
16	31	14
17	32	15
18	33	16
19	34	17
20 (2 grupos de 10)	**40** (4 grupos de 5)	18
21	41	19
22	42	1A (1 grupo de 12 mais 10)
23	43	1B
24 (2 grupos de 10 mais 4)	**44** (4 grupos de 5 mais 4)	**20** (2 grupos de 12)

Quadro 4 – Representação da contagem dos quadrados da figura 9, nas bases 10, 5 e 12

Analisando o quadro 4 verificamos que os 24 quadrados da figura se representam por:

$24_{(10)} = 2x10 + 4$ $\quad$ $44_{(5)} = 4x5 + 4$ $\quad$ $20_{(12)} = 2x12 + 0$

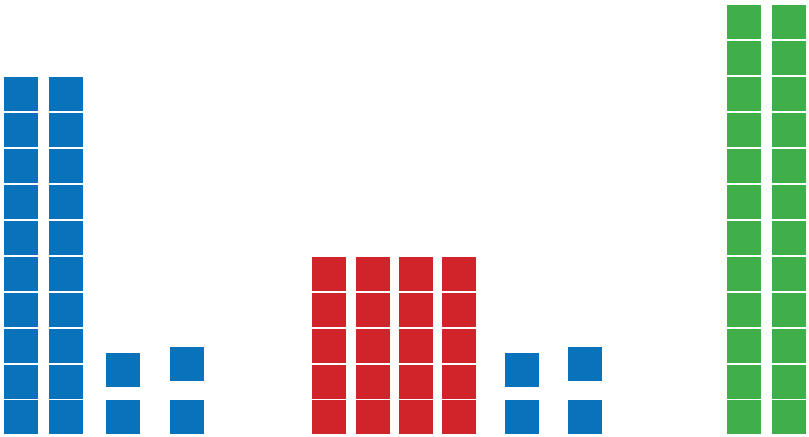


Figura 10 – Representação da quantidade 24 nas bases 10, 5 e 12

É óbvio que as três representações correspondem à mesma quantidade de quadrados, mas considerando diferentes agrupamentos decorrentes da contagem em bases diferentes.

TAREFA 6

1. O sistema indo-árabe é um sistema posicional de base 10, utiliza 10 símbolos.

a) Quantos símbolos utiliza um sistema posicional que seja de base 6? Quais são?

b) E se a base for 13, quantos símbolos terão de ser utilizados?

2. Considere 20 objetos. **Registe** a contagem de 1 em 1 desses 20 objetos:

a) Na base 3.

b) Na base 6.

c) Na base 11.

Na situação apresentada nos parágrafos anteriores, apresentaram-se contagens de quantidades que implicavam agrupamentos da base, na segunda ordem. Contudo, para quantidades maiores é muitas vezes necessário fazer agrupamentos de ordens superiores. Partindo do exemplo anterior, se em vez de 24 quadrados tivéssemos 25 quadrados como iríamos representar o número na base 5? Recordemos que $24_{(10)} = 44_{(5)}$. Na base 5 só temos os símbolos 0, 1, 2, 3 e 4, logo $44_{(5)}$ é o maior número de 2 algarismos possível na base 5, porque não podemos ter um valor superior a 4 nem na primeira ordem nem na segunda ordem. Para representar a quantidade 25 resta-me a opção de ocupar a terceira ordem. Então a representação de $25_{(10)}$ é $100_{(5)}$. O algarismo 1 ocupa a terceira ordem e vale $5^2=25$.

Para quantidades superiores a contagem prossegue tal como exemplificado no quadro 4 para as duas primeiras ordens. Assim, o sucessor de $100_{(5)}$ e $101_{(5)}$; o sucessor de $101_{(5)}$ é $102_{(5)}$; o sucessor de $102_{(5)}$ é $103_{(5)}$; o sucessor de $103_{(5)}$ é $104_{(5)}$; o sucessor de $104_{(5)}$ é $110_{(5)}$ e assim sucessivamente. O maior número de 3 algarismos na base 5 é o número $444_{(5)}$.

Vamos analisar a quantidade $125_{(10)}$. Qual será a representação de $125_{(10)}$, na base 5 e na base 12?

Para escrever $125_{(10)}$, na base 5, tenho de pensar na natureza dos agrupamentos na base 5, sendo que o máximo de grupos que posso fazer é 4, independentemente de qual é a ordem. Vejamos as primeiras potências de 5 (com expoente natural): $5^0 = 1$; $5^1 = 5$; $5^2 = 25$; $5^3 = 125$.

Conclui-se de forma imediata que é possível fazer um grupo da quarta ordem e que nesse grupo se esgotam as 125 unidades. Assim, $125_{(10)} = 1000_{(5)}$. O algarismo 1 no número $1000_{(5)}$ vale 125.

Para escrever de $125_{(10)}$, na base 12, tenho de pensar na natureza dos agrupamentos na base 12, sendo que o máximo de grupos que posso fazer é 11, independentemente de qual é a ordem. Vejamos as primeiras potências de 12 (com expoente natural): $12^0 = 1$; $12^1 = 12$; $12^2 = 144$.

Conclui-se de forma imediata que não é possível fazer qualquer grupo de terceira ordem, porque nessa ordem os grupos têm 144 unidades, o que significa que tenho de identificar quantos grupos de 12 posso fazer. Conclui-se que posso fazer 10 grupos de 12 e sobram 5 unidades. Assim, $125_{(10)} = A5_{(12)}$. O símbolo A no número $A5_{(12)}$ vale 120 (10x12).

TAREFA 7

1. Em cada situação e sem efetuar cálculos, **determine** em que base a igualdade se verifica. **Justifique**.

a) $24_{(b)} + 32_{(b)} = 100_{(b)}$

b) $7_{(10)} = 21_{(b)}$

c) $24_{(10)} = 20_{(b)}$

d) $33_{(b)} + 45_{(b)} = 100_{(b)}$

e) $9_{(10)} = 100_{(b)}$

f) $23_{(10)} = 21_{(b)}$

2. **Escreva** o sucessor de:

a) $233_{(4)}$ b) $1022_{(3)}$ c) $19B_{(12)}$ d) $9AA_{(11)}$

3. **Indique** quantos números de três algarismos se podem representar no sistema de base 6.

4. **Indique** quantos números de dois dígitos se podem representar num sistema de numeração de base 11.

5. Indique quantos números de 3 algarismos, ímpares e maiores que 200 se podem escrever num sistema posicional de base 6.

1.3.2 Mudanças de base

Com números pequenos as mudanças de base são intuitivas e muito imediatas, como se pôde ver nos exemplos anteriores. Contudo, existem técnicas que nos permitem fazer mudanças de base mesmo com números maiores. Essas técnicas permitem-nos converter um número escrito numa base noutra base.

Para a aplicação das técnicas de mudança de base é importante considerar a natureza dos agrupamentos feitos em cada ordem em função da base em que o número está escrito.

Consideremos o número $123_{(10)}$. Na base dez temos 1 grupo de 100, 2 grupos de 10 e 3 unidades. O número pode ser escrito pela expressão $1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$. Esta expressão designa-se por decomposição po-

linomial do número. Na base 10, os agrupamentos das ordens superiores à primeira são feitos em potências da base 10, cujos expoentes aumentam sucessivamente uma unidade (10^1 na segunda ordem, 10^2 na terceira e assim sucessivamente). Em bases diferentes da base 10 (consideremos uma base k), os agrupamentos são feitos em potências cuja base é k. A decomposição polinomial do número *abcd* na base *k* é a seguinte:

$$abcd_{(k)} = a \times k^3 + b \times k^2 + c \times k^1 + d$$

De uma forma mais geral, podemos dizer que a decomposição polinomial de um número de *n* algarismos na base *k* é:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2 a_{1(k)} = a_n \times k^{n-1} + a_{n-1} \times k^{n-2} + \ldots + a_3 \times k^2 + a_2 \times k + a_1$$

Considerar a decomposição polinomial do número vai ser essencial para escrever, na base 10, um número escrito noutra base como veremos na secção seguinte.

Mudar um número escrito numa base b (b≥2) para a base 10

Dado um número *N* escrito numa base *b*, determinamos a sua representação na base 10 fazendo a decomposição polinomial do número escrito na base b. Vejamos os seguintes exemplos:

$4321_{(5)} = 4x5^3 + 3x5^2 + 2x5^1 + 1x\,5^0 =$

$= 4x125 + 3x25 + 2x5 + 1x1 =$

$= 500 + 75 + 10 + 1 =$

$= 586$

$\mathbf{4321_{(5)} = 586_{(10)}}$

$1AB_{(12)} = 1x12^2 + Ax12^1 + Bx12^0 =$

$= 1x144 + 10x12 + 11 =$

$= 144 + 120 + 11 =$

$= 275$

$\mathbf{1AB_{(12)} = 275_{(10)}}$

Mudar um número escrito na base 10 para uma base b (b≥2)

Dado um número **N** na base 10, para converter **N** numa base **b** temos de refazer os agrupamentos de acordo com as potências de cada ordem da base b.

Vejamos um exemplo: $142_{(10)} = ?_{(5)}$

Na base 5, cada ordem é dada pelas potências de 5: 5^0, 5^1, 5^2, 5^3 ... Organizemos as 4 primeiras ordens da seguintes forma:

5^3	5^2	5^1	5^0
?	?	?	?

Começando da maior para a menor ordem, percebemos que é possível fazer **1** grupo de 4.ª ordem (125) e sobram 17, logo o algarismo de 4.ª ordem é 1:

5^3	5^2	5^1	5^0
1	?	?	?

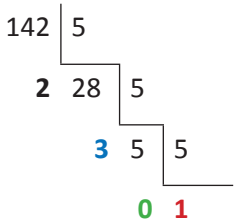
Ora, as 17 unidades que sobram não permitem fazer **qualquer** grupo de 3.ª ordem (25), logo o algarismo de 3.ª ordem é **0**, mas podemos fazer **3** grupos de 2.ª ordem (5) e sobram **2** unidades que coloco na 1.ª ordem:

5^3	5^2	5^1	5^0
1	**0**	**3**	**2**

$$\mathbf{142_{(10)} = 1032_{(5)}}$$

A mudança de base pode ser feita, em alternativa, com recurso ao algoritmo da divisão. O procedimento é iterativo e implica, inicialmente,

dividir o número pela base, o que permite obter um quociente e um resto; de seguida divide-se o quociente anteriormente obtido pela base, obtendo um novo quociente e um novo resto; este processo repete-se até que se obtenha um quociente inferior à base. O último quociente obtido é o algarismo de maior ordem e os restos, ordenados a partir do último, são os algarismos das ordens sucessivamente inferiores. Retomemos o exemplo anterior em que se pretende escrever $142_{(10)}$ na base 5. Este algoritmo aplicado ao exemplo resultaria nas seguintes divisões:



Resulta que o **1** é o algarismo de quarta ordem, o **0** é o algarismo de terceira ordem, o **3** é o algarismo de segunda ordem e o **2** é o algarismo de primeira ordem.

Concluímos assim, da mesma forma, que $\mathbf{142_{(10)} = 1032_{(5)}}$.

Mudar um número escrito numa base b (b≥2) para uma base x (x≥2),

Nesta situação devemos passar o número escrito na base b (b≥2) para a base 10 e depois mudar o número escrito na base 10 para a base x, usando os procedimentos descritos nas secções anteriores.

Vejamos o exemplo: $83_{(11)} = ?_{(3)}$

$83_{(11)} = 8 \times 11 + 3 =$

$= 88 + 3 =$

$= 91_{(10)}$

$\mathbf{83_{(11)} = 10101_{(3)}}$

$91_{(10)}$ reagrupado na base 3:

$3^4=81$	$3^3=27$	$3^2=9$	$3^1=3$	$3^0=1$
1	0	1	0	1

TAREFA 8

1. **Escreva** os números abaixo em base decimal.

a) $322_{(4)}$

b) $41_{(5)}$

c) $21002_{(3)}$

d) $1A9_{(11)}$ (A=10)

2. **Escreva**, nas bases indicadas, os seguintes números.

a) $310_{(10)}$ na base 12

b) $1034_{(5)}$ na base 13

c) $14A_{(11)}$ na base 8

d) $158_{(9)}$ na base 3

3. **Indique** qual é, na base Y>2, a representação dos inteiros:

(a) Y+1

b) 2Y

c) Y^2

d) $2Y^3$

Exercícios e problemas resolvidos

1. Em cada situação e sem efetuar cálculos, **determine** em que base a igualdade se verifica. **Justifique**.

a) $33_{(b)} + 45_{(b)} = 100_{(b)}$

a) b=8, porque $3+5=10_{(8)}$

b) $9_{(10)} = 21_{(b)}$

b) b=4, porque 2x4+1=9

c) $22_{(10)} = 20_{(b)}$

c) b=11, porque 2x11+0=22

2. Escreva os sucessores dos seguintes números, nas bases indicadas.

a) $10011_{(2)}$

a) 10100

b) $99_{(12)}$

b) 9A

c) $19A_{(11)}$

c) 1A0

3. Escreva:

a) $39_{(10)}$ na base 2 **b)** $382_{(10)}$ na base 15 **c)** $311_{(7)}$ na base 12

a) Para escrever $39_{(10)}$ na base 2 temos de determinar o número de agrupamentos de cada ordem, nessa base, começando pela maior ordem possível. Verificamos que é possível fazer um agrupamento na 6.ª ordem (32), um na 3.ª ordem (4), um na 2.ª ordem (2) e sobra uma unidade que fica na 1.ª ordem.

$2^5=32$	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$
1	0	0	1	1	1

$39_{(10)} = 100111_{(2)}$

b) Para escrever $382_{(10)}$ na base 15 temos de determinar o número de agrupamentos de cada ordem, nessa base, começando pela maior ordem possível. Verificamos que é possível fazer um agrupamento na 3.ª ordem (225) e sobram 157 unidades, então fazemos dez agrupamentos na 2.ª ordem (150) e sobram 7 unidades que ficam na 1.ª ordem. Note-se que os 10 grupos de 2.ª ordem se representam por A.

$15^2=225$	$15^1=15$	$15^0=1$
1	A	7

$382_{(10)} = 1A7_{(15)}$

c) Para escrever $311_{(7)}$ na base 12, temos, em primeiro lugar de escrever $311_{(7)}$ na base 10 e depois então, fazer a mudança para a base 12.

Assim para escrever $311_{(7)}$ na base 10, fazemos a decomposição polinomial do número:

$311_{(7)} = 3x7^2 + 1x7^1 + 1x\ 7^0 = 3x49 + 7 + 1 = 155_{(10)}$

Para escrever $155_{(10)}$ na base 12 temos de determinar o número de agrupamentos de cada ordem, nessa base, começando pela maior ordem possível. Verificamos que é possível fazer um agrupamento na 3.ª ordem (144) e sobram 11 unidades, então não é possível fazer qualquer agrupamento na 2.ª ordem. As 11 unidades são colocadas na 1.ª ordem, com o símbolo B.

$12^2=144$	$12^1=12$	$12^0=1$
1	0	B

$311_{(7)} = 10B_{(12)}$

4. Indique quantos números de 3 algarismos se podem representar no sistema de base 7.

Na base 7 uso os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Na terceira ordem posso ter os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, num total de 6 possibilidades. Nas segunda e primeira ordens posso ter os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, num total de 7 possibilidades. Logo a quantidade de números que posso ter de 3 algarismos na base 7, obtém-se calculando 6x7x7=252.

5. Determine o valor de a de modo que $102a_{(5)} = a50_{(6)}$

$$102a_5 = a50_6 \Leftrightarrow 1 \times 5^3 + 2 \times 5 + a = a \times 6^2 + 5 \times 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 125 + 10 + a = 36a + 30 \Leftrightarrow 35a = 105 \Leftrightarrow a = 3$$

6. Determine qual ou quais os números de 2 algarismos que se escrevem na base 7 com os mesmos algarismos que na base 9, mas por ordem inversa.

$ab_{(7)} = ba_{(9)}$

$7a + b = 9b + a \Leftrightarrow 6a = 8b \Leftrightarrow a = \frac{8b}{6} \Leftrightarrow a = \frac{4b}{3}$

Sabemos que:

□ $a \neq b \neq 0$, porque ambos os símbolos ocupam a maior ordem.

□ a e b podem variar entre 1 e 6, porque ab é um número da base 7.

Então, verificamos que a única hipótese é: $a = 4$ e $b = 3$.

Portanto: $43_{(7)} = 34_{(9)}$

7. Sabe-se que $ab_{(9)}$ se escreve $b0a_{(5)}$. **Determine** a e b.

$ab_{(9)} = b0a_{(5)}$

$9a + b = b \times 5^2 + a \Leftrightarrow 24b = 8a \Leftrightarrow a = 3b$

Sabemos que:

• $a \neq b \neq 0$

• a e b podem variar entre 1 e 4, porque b0a é um número da base 5

Então, verificamos que a única hipótese é a seguinte: $b = 1$ e $a = 3$

Portanto: $31_{(9)} = 103_{(5)}$

8. 96 e AB são representações da mesma quantidade em sistemas de numeração cujas bases diferem duas unidades. **Determine** as bases.

Se 96 e AB representam a mesma quantidade e as bases diferem duas unidades, o que está escrito na base maior é o 96 porque 9<A, então:

$96_{(x)} = AB_{(X-2)}$

$9x + 6 = \mathrm{A} \times (x - 2) + \mathrm{B} \Leftrightarrow 9x + 6 = 10x - 2 \times 10 + 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 15$

Concluímos que: $96_{(15)} = \mathrm{AB}_{(13)}$

9. Determine o maior número natural que ao ser dividido por 16 dá um resto que é metade do quociente correspondente.

$N = 16 \times q + \frac{a}{2}$

- $\frac{a}{2} < 16$

- O maior número natural (*N*) será obtido considerando o maior resto possível e consequentemente o maior quociente possível.

O maior resto: $\frac{a}{2} = 15 \Leftrightarrow q = 30$

Portanto: $N = 16 \times 30 + 15 = 495$

10. Considere os seguintes números escritos nas bases indicadas: $12c_{(a)}$, $a32_{(4)}$, $bbb_{(c)}$, sendo $a \neq b \neq c$. **Calcule** $a + b + c$.

Analisando as relações entre a, b e c nos três números escritos, facilmente se conclui que:

$0 < \mathrm{b} < \mathrm{c} < a < 4$

Logo, $a = 3; b = 1;\ c = 2$

Então, $a + b + c = 6$

Exercícios e problemas globais

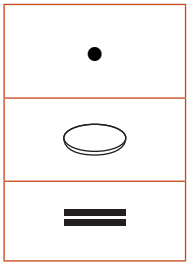
1. A cultura Maia usou o sistema vigesimal. Criaram um sistema baseado na posição dos símbolos, que incluía a utilização do zero, um símbolo ovalado que aparece em numerosos vestígios ou códices maias.

1.1. Classifique o sistema de numeração Maia quanto à sua tipologia. Justifique a sua resposta.

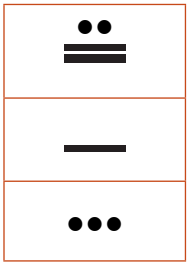
1.2. Explique a importância do zero num sistema deste tipo.

1.3. Identifique no sistema de numeração indo-árabe os números representados abaixo no sistema Maia.

a)



b)



1.4. **Escreva** $8411_{(10)}$ no sistema Maia.

2. Em cada situação e sem efetuar cálculos, **determine** em que base a igualdade se verifica. **Justifique**.

a) $13_{(b)} + 65_{(b)} = 100_{(b)}$ **b)** $4_{(10)} = 11_{(b)}$ **c)** $39_{(10)} = 30_{(b)}$

3. **Escreva** nas bases indicadas:

a) o sucessor de $10111_{(2)}$ **b)** o antecessor de $9A_{(11)}$

4. **Determine** quantos números de 3 algarismos se podem representar no sistema de base 8.

5. **Determine, justificando**, quantos são os números de três algarismos que na base 6 são pares e maiores que 300.

6. **Escreva**:

a) $39_{(10)}$ na base 2 **b)** $382_{(10)}$ na base 15

c) $311_{(7)}$ na base 12

d) $1863_{(10)}$ na base 12

e) $673_{(9)}$ na base 16

f) $1414_{(5)}$ na base 11

7. **Indique** qual é, na base y>2, a representação dos inteiros:

a) $2y^3 + 1$

b) $y^2 + y$

8. Determine o número representado por *a* de modo que $5a04_{(6)} = 994_{(11)}$.

9. Determine o número representado por a de modo que $a36_{(8)} = aa4_{(9)}$.

10. Determine a base do sistema de numeração em que $356_{(b)} = 650_{(8)}$.

11. Identifique quais são, na base 10, os números de 2 algarismos que se escrevem na base 7 com os mesmos algarismos que na base 13, mas por ordem inversa.

12. O quádruplo de um número de dois algarismos subtraído doze unidades é igual ao triplo desse número invertendo a ordem dos algarismos e adicionando duas unidades. **Determine** esse número.

13. O número 118 escrito numa base desconhecida é 4 vezes maior que o número 105 escrito numa base igual a metade da do primeiro. **Determine** as bases.

14. Sabe-se que 300 e 135 são representações do mesmo número em sistemas cujas bases diferem duas unidades. **Determine** essas bases.

15. Determine os algarismos *a*, *b* e *c* de modo que $abc_{(10)}=cba_{(9)}$.

16. Fixe três algarismos distintos e diferentes de zero. Forme os seis números com dois algarismos distintos tomados dentre os algarismos fixados. **Mostre** que a soma desses números é igual a 22 vezes a soma dos três algarismos fixados.

17. Considere os seguintes números escritos nas bases indicadas: $1a1_{(4)}$, $bb_{(c)}$, $2c_{(a)}$. **Calcule** $a+b+c$.

18. Considere a seguinte igualdade: $136_{(m)} + 33n_{(p)} + 13m_{(n)} = 44p_{(10)}$. **Determine** *m, n* e *p*.

19. Se a um número de 3 algarismos, com 9 nas centenas, se retirar o algarismo das centenas, o número resultante é 1/21 do número original. **Determine** o número original.

20. Determine os três números da base 8, sabendo que:

O menor tem dois algarismos;
O médio tem os mesmos algarismos escritos por ordem inversa;
O maior obtém-se do menor intercalando um zero entre os algarismos;
A diferença entre o maior e o médio é igual à diferença entre o médio e o menor.

21. Efetue, nas bases indicadas, as operações seguintes.

a) Base 4 : 312+223 121-32 12x3

b) Base 5 : 122+43 41-24 23x4 234-42

c) Base 7 : 64+55 635-543 63x52

d) Base 12: 8A1+ 30B 400- AB 56x3 948+A1+22

22. Determine o número na base 4 que dividido por $31_{(4)}$ dá quociente $123_{(4)}$ e resto $11_{(4)}$.

23. Determine o maior número natural que ao ser dividido por 15 dá um resto igual ao quadrado do quociente correspondente.

24. Determine o maior número natural que ao ser dividido por 21 dá um resto que é a quarta parte do quociente correspondente.

25. Escreva a sequência dos primeiros números na base 2.

a) Repare que o último dígito de cada número representado na base 2 é alternadamente 0 e 1. Que outros padrões encontra nos dígitos dos números representados na base 2?

b) Na base 2, com 1 algarismo há 1 número, com 2 algarismos há 2 números, com 3 algarismos há 4 números. Com n algarismos, quantos números há?

26. Acrescentar um zero à direita de um número escrito na base 10 equivale a multiplicar esse número por 10. **Diga** a que equivale acrescentar um número à direita de um número numa base *b*. **Justifique**.

27. Comente a afirmação "Qualquer que seja a base de um sistema de numeração, qualquer número que termine em zero é divisível pela base."

28. Faça uma pesquisa acerca do código de Francis Bacon.

a) Explique o processo de codificação de mensagens que era utilizado.

b) Explicite a conexão que existe entre este código de letras e a sequência binária.

CAPÍTULO 2

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os números fazem parte da nossa vida quotidiana, assumindo múltiplas e variadas formas. Numa típica rotina matinal estão presentes quando vemos as horas, nas embalagens dos alimentos que consumimos ao pequeno almoço, no computador de bordo do automóvel, nos sinais de trânsito, etc. Os números são classificados em conjuntos numéricos, em função das suas caraterísticas. Alguns dos conjuntos mais relevantes são: o conjunto dos **números naturais**, o conjunto dos **números inteiros**, o conjunto dos **números racionais** e o conjunto dos **números reais**. Dedicaremos este capítulo ao estudo de algumas caraterísticas e propriedades destes conjuntos numéricos.

2.1. Números naturais

Na contagem de um conjunto de objetos inteiros usamos os **números naturais**. O conjunto dos números naturais é designado por N.

$|N = \{0,1,2,3,...\}$

Optou-se por considerar o zero como um número natural uma vez que este é importante numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, traduzindo a ideia de não haver objetos para contar.

O conjunto dos números naturais é um conjunto ordenado. Repare-se que considerando $a,b \in N$, diz-se que $a < b$ se existir um número $c \in N$ tal que $a + c = b$. Nesta relação de ordem existe transitividade, tricotomia e monotonia:

- Transitividade $\forall a,b,c \in N$, *se* $a < b$ *e* $b < c$, então $a < c$
- Tricotomia Se $a,b \in N$, então $a < b$ ou $a > b$ ou $a = b$
- Monotonia $\forall a,b,c \in N$, *se* $a < b$ *então* $a + c < b + c$

Os números naturais verificam uma enorme diversidade de propriedades simples que conseguimos demonstrar de forma direta. Por exemplo, é simples demonstrar que a soma de quaisquer três números naturais consecutivos é um número múltiplo de 3:

Os 3 números naturais consecutivos podem ser representados por n, $n+1, n+2$;

Então, temos: $S = n + (n+1) + (n+2) =$

$$= n + n + 1 + n + 2 =$$

$$= 3n + 3 =$$

$$= 3 \times (n+1) =$$

$$= 3 \times k, \forall k \in N$$

Portanto, temos $S = 3k$, $\forall k \in N$, logo concluímos que a soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

TAREFA 9

1. Considere a seguinte afirmação: "Se pensarmos em dois números naturais consecutivos e subtrairmos o quadrado do menor ao quadrado do maior, obtemos sempre um número que não é múltiplo de dois."

a) Escolha dois números naturais consecutivos e **verifique** que, para esses números, a afirmação é verdadeira.

b) Designando por n um número natural, **mostre** que $(n+1)^2$-n^2 é sempre um número que não é múltiplo de dois.

2. Mostre que, no universo dos números naturais:

(i) a soma de dois números ímpares quaisquer é sempre um número par;

(ii) a soma de dois números pares quaisquer é um número par;

(iii) a soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar;

(iv) o produto de dois números ímpares quaisquer é um número ímpar.

3. Mostre que o quadrado de qualquer número natural ou é múltiplo de 4 ou é múltiplo de 4 aumentado de uma unidade.

2.1.1. Múltiplos e divisores de um número natural

Os **múltiplos** de um número natural obtêm-se multiplicando esse número por todos os números naturais. Por exemplo, se quisermos obter os múltiplos de 2, multiplicamos o número 2 por todos os números naturais:

$2\times0 = 0$; $2\times1 = 2$; $2\times2 = 4$; $2\times3 = 6$; e assim sucessivamente.

Como o conjunto N é um conjunto infinito, verificamos que o conjunto dos múltiplos de um número natural é um conjunto infinito.

Podemos representar o conjunto dos múltiplos de 2 em extensão e em compreensão, respetivamente:

M_2 = {0,2,4,6,8,10,12,14, ...} M_2= {múltiplos de 2}

Se quisermos saber se um número é múltiplo de outro, podemos realizar uma divisão inteira entre o maior e o menor. Quando o quociente é um número inteiro (e, por conseguinte, o resto da divisão é 0), estamos perante um número múltiplo do outro. No exemplo acima, se quisermos saber se 14 é múltiplo de 2, basta dividir 14 por 2. Verificamos que 14:2=7, logo 14 é múltiplo de 2, porque 2x7=14. É importante destacar que:

- todo número natural é múltiplo de si mesmo;
- o zero é múltiplo de qualquer número.

Um número natural (*d*) é **divisor** de um número natural (*N*), diferente de zero, quando o resto da divisão inteira de *N* por *d* é zero. Por exemplo, para obter os divisores de 12, temos de procurar os números naturais que dividem 12 de forma exata (com resto zero):

12:**1**=12 12:**2**=6 12:**3**=4 12:**4**=3 12:**6**=2 12:**12**=1

Podemos representar o conjunto dos divisores de 12 em extensão e em compreensão, respetivamente:

D_{12}={1,2,3,4,6, 12} D_{12}={divisores de 12}

É importante destacar que:

- O número 1 é o menor divisor de todos os números naturais diferentes de zero;
- O próprio número é o maior dos divisores desse número;

- Qualquer número natural diferente de zero é múltiplo e divisor de si próprio;
- Se a é divisor de b, então b é múltiplo de a e vice-versa, com $a, b \neq 0$;
- Se a é múltiplo de b, então b divide a ou b é um fator de a, com $a, b \neq 0$;

TAREFA 10

1. Considere o número 20. Escreva em extensão o conjunto dos seus divisores.

2. Se eu tiver 75 bolas de ténis, diga se é possível arrumar as bolas em caixas, sem que sobre nenhuma bola, quando:

a) Cada caixa leva 2 bolas.

b) Cada caixa leva 3 bolas.

c) Cada caixa leva 5 bolas.

d) Cada caixa leva 7 bolas.

3. Indique o valor lógico das seguintes afirmações.

a) Todos os múltiplos de 8 são múltiplos de 4.

b) Todos os divisores de 12 são divisores de 6.

d) O número 8 é fator de 24.

e) O número 1 é múltiplo de qualquer número natural diferente de zero.

4. Uma florista tem 24 rosas vermelhas e 36 rosas brancas e quer fazer ramos de rosas de duas cores, sem que sobre qualquer rosa e de forma que todos os ramos tenham o mesmo número de rosas. Quantos tipos de ramos pode fazer?

5. Se dividirmos 2a por 2b obtemos um quociente q e o resto r. Quais são o quociente e o resto da divisão inteira de a por b? Justifique.

2.1.2. Números primos e números compostos

Todo o número natural, diferente de 0 e de 1 é um **número primo** se não admite outros divisores, além do 1 e do próprio número. Se um número diferente de 0 e 1 não é primo então diz-se um **número composto**. Um número composto pode escrever-se na forma de um produto de fatores primos e nesse caso a decomposição é única.

O **teorema fundamental da aritmética** define que todo o número natural, maior do que 1, ou é primo ou pode ser escrito como um produto de fatores primos. De outra forma pode dizer-se que:

Seja a > 1 um número natural, a é primo ou então existem primos $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_t$, tais que $a = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_t$ e essa decomposição é única.

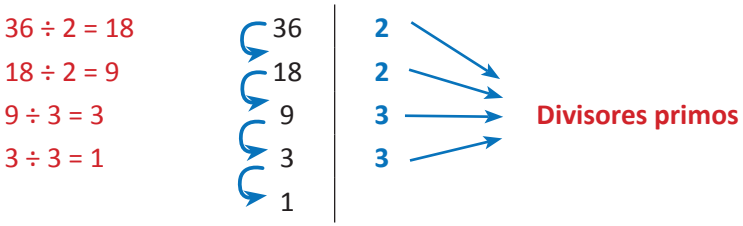
Se considerarmos os números maiores que 1 e menores que 20, identificamos como números primos os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19. Os restantes são números compostos, logo, decomponíveis em fatores primos. Vejamos a decomposição desses números compostos:

4 = 2 x 2	**6** = 2 x 3	**8** = 2 x 2 x 2	**9** = 3 x 3	**10** = 2 x 5
12 = 2 x 2 x 3	**14** = 2 x 7	**15** = 3 x 5	**16** = 2 x 2 x 2 x 2	**18** = 2 x 3 x 3

Para verificarmos se um número é ou não primo, temos de verificar se admite ou não outros divisores além de 1 e dele próprio. Por exemplo, o número 36 não é primo porque admite outros divisores além de 1 e 36. O número 36 é decomponível em fatores primos, da seguinte forma:

$$\mathbf{36} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Uma forma simples de obter a decomposição de um número em fatores primos é usar um esquema como o que se ilustra na figura 11.



$$\mathbf{36} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Figura 11 – Esquema da decomposição de um número em fatores primos

Uma questão interessante é analisar como se distribuem os números primos ao longo da sequência de números naturais. O matemático grego Eratóstenes (275-194 a.C.) inventou um algoritmo simples para identificar os números primos numa sequência de números naturais, inferiores a um determinado número natural (valor limite), designado por **crivo de Eratóstenes**. O algoritmo funciona exatamente como um crivo, que vai eliminando os números compostos até só restarem os números primos. Esta eliminação é feita identificando os primeiros números primos e eliminando os seus múltiplos sucessivamente. Quando se atinge a raiz quadrada do valor limite deve-se parar, uma vez que já se identificaram todos os números primos existentes nessa sequência de números naturais. No caso da raiz não ser um quadrado perfeito, arredonda-se a um número natural por defeito.

Vamos exemplificar o crivo para os números naturais entre 1 e 100. Os passos são os seguintes:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

1.º eliminar o 1 que não é primo;

2.º assinalar o primeiro número primo da lista; neste caso é 2;

3.º eliminar todos os múltiplos de 2 exceto o 2 que é primo (4, 6, 8, ...);

4.º o próximo número da lista (3) é primo, assinala-se e eliminam-se depois todos os seus múltiplos que ainda restam na tabela (9, 15, 21, ...);

5.º o próximo número da lista (5) é primo, assinala-se e eliminam-se depois todos os seus múltiplos restantes (25, 35, ...);

6.º repete-se sucessivamente este procedimento até chegar ao valor limite, que neste exemplo é 10.

Verificamos que os números primos menores que 100 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97. Repare-se que os números primos vão sendo mais raros à medida

que avançamos na sequência de números naturais. Quanto maiores são os números, mais difícil é encontrar um número primo. Poder-se-ia até pensar que a dada altura deixa de haver primos, ou seja, que o conjunto de números primos é finito. Contudo, Euclides no século III a. C. provou que de facto existem infinitos números primos.

Para testarmos se um número é ou não primo podemos usar uma propriedade muito interessante:

Seja $n \geq 2$ um número inteiro. Se n é composto, então existe um primo p tal que p divide n e $p \leq \sqrt{n}$.

Em termos práticos, significa que para testarmos se um determinado número n é primo, é suficiente testarmos a divisibilidade do número pelos números primos menores ou iguais a $\sqrt{n}$.

Vejamos um exemplo. Será que 1723 é um número primo? Basta dividir 1723 pelos sucessivos primos menores ou iguais a $\sqrt{1723}$. Como $\sqrt{1723} = 41{,}51...$ basta ver se 1723 é divisível pelos primos menores ou iguais a 41. Iremos verificar que não, pelo que podemos concluir que 1723 é um número primo.

Se repararmos existem vários pares de números primos que diferem duas unidades: (3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61), (71,73). Os pares de números com essa propriedade dizem-se **primos gémeos**.

TAREFA 11

1. Dois amigos estão a jogar com 2 dados cúbicos. Lançam 2 dados à vez e calculam a soma obtida. A Joana ganha se a soma for um número primo. O Tiago ganha se a soma for um número composto maior que 6. Empatam nos restantes casos. Será que o jogo é justo? **Explique** o seu raciocínio.

2. Sendo $k = a \times b$, com a e b números primos, **indique** quais são os divisores de ak.

3. Indique quais são os divisores do número $12p$, sendo p um número primo.

4. Verifique se algum dos números seguintes é primo: 433, 637, 947.

2.1.3. Critérios de divisibilidade

Recorde que: se ***D*** e ***d*** são números naturais, diz-se que ***D*** (dividendo) é divisível por ***d*** (divisor) se existe um número natural ***q*** (quociente) tal que ***d x q = D***. Os critérios de divisibilidade são úteis para verificar se um número é divisível por outro sem ter de recorrer à divisão, isto é, dizer se D é divisível por d sem fazer a divisão.

No capítulo anterior caraterizámos a importância da ordem dos algarismos num número, atendendo a que o nosso sistema é posicional e de base 10. Em cada número, os algarismos representam múltiplos de potências de dez. A soma dos múltiplos das potências de dez determina, de modo único, o número representado. Um exemplo: $175 = 1x10^2 + 7x10^1 + 5x10^0$.

Iremos abordar os critérios de divisibilidade mais usuais, nomeadamente os critérios de divisibilidade por 2, por 3, por 4, por 5 e por 9. Em qualquer dos casos que iremos apresentar, optou-se por deduzir os critérios de divisibilidade a partir do exemplo de um número *abcd* de 4 algarismos e não a partir do caso geral, ou seja, de um número de qualquer dimensão, unicamente na tentativa de reduzir o nível de formalização.

Critério de divisibilidade por 2

Para apresentar o critério de divisibilidade por 2, consideremos como exemplo um número natural de 4 algarismos abcd e a sua decomposição polinomial:

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

Relativamente à divisibilidade por 2, o que podemos concluir? As parcelas que correspondem às ordens superiores a 1 são todas divisíveis por 2, uma vez que todos os múltiplos de 10 são divisíveis por 2, resta averiguar se o algarismo das unidades é ou não divisível por 2:

$$abcd = \underbrace{a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10}_{\text{é divisível por 2}} + d$$

teremos de averiguar se d (algarismo das unidades) é divisível por 2

Concluímos que um número n ϵ IN é divisível por 2 se o seu algarismo das unidades for 0, 2, 4, 6 ou 8.

Por exemplo, o número 126 é divisível por 2 porque o algarismo das unidades é par; o número 125 não é divisível por 2 porque o algarismo das unidades é impar.

Critério de divisibilidade por 5

Para apresentar o critério de divisibilidade por 5, consideremos como exemplo um número natural de 4 algarismos abcd e a sua decomposição polinomial:

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

Relativamente à divisibilidade por 5, o que podemos concluir? As parcelas que correspondem às ordens superiores a 1 são todas divisíveis por 5,

uma vez que todos os múltiplos de 10 são divisíveis por 5, resta averiguar se o algarismo das unidades é ou não divisível por 5:

$$abcd = \underbrace{a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10}_{\text{é divisível por 5}} + d$$

teremos de averiguar se d (algarismo das unidades) é divisível por 5

Concluímos que um número n ϵ IN é divisível por 5 se o seu algarismo das unidades for 0 ou 5.

Por exemplo, os números 120 e 125 são divisíveis por 5 porque os algarismos das unidades são, respetivamente, 0 e 5; o número 126 não é divisível por 5 porque o algarismo das unidades não é 0 ou 5.

Critério de divisibilidade por 3

Para apresentar o critério de divisibilidade por 3, consideremos como exemplo um número natural de 4 algarismos abcd e a sua decomposição polinomial:

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

Analisando cada uma das parcelas não é possível tirar conclusões sobre a sua divisibilidade por 3. Contudo, vejamos as seguintes transformações:

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

$$= a \times (999 + 1) + b \times (99 + 1) + c \times (9 + 1) + d = \quad \text{(pela propriedade distributiva)}$$

$$= a \times 999 + a + b \times 99 + b + c \times 9 + c + d =$$

$$= \underbrace{999a + 99b + 9c}_{\text{é divisível por 3}} + \boxed{a + b + c + d}$$

teremos de averiguar se a+b+c+d é divisível por 3

Sendo a soma 999a + 99b + 9c um múltiplo de 3, resta averiguar se a+b+c+d (soma de todos os algarismos do número dado) é ou não um múltiplo de 3.

Concluímos que um número n ϵ IN é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 3.

Por exemplo, o número 126 é divisível por 3 porque a soma dos seus algarismos é 9 e 9 é um múltiplo de 3; o número 125 não é divisível por 3 porque a soma dos seus algarismos é 8 e 8 não é um múltiplo de 3.

Critério de divisibilidade por 9

Este critério de divisibilidade é idêntico ao critério de divisibilidade por 3. Para apresentar o critério de divisibilidade por 9, consideremos como exemplo um número natural de 4 algarismos abcd e a sua decomposição polinomial:

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

Analisando cada uma das parcelas não é possível tirar conclusões sobre a sua divisibilidade por 9. Contudo, vejamos as seguintes transformações:

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

$$= a \times (999 + 1) + b \times (99 + 1) + c \times (9 + 1) + d = \quad \text{(pela propriedade distributiva)}$$

$$= a \times 999 + a + b \times 99 + b + c \times 9 + c + d =$$

$$= \underbrace{999a + 99b + 9c}_{\text{são divisíveis por 9}} + \boxed{a + b + c + d}$$

teremos de averiguar se a+b+c+d é divisível por 9

Sendo a soma 999a + 99b + 9c um múltiplo de 9, resta averiguar se a+b+c+d (soma de todos os algarismos do número dado) é ou não um múltiplo de 9.

Concluímos que um número n ϵ IN é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 9.

Por exemplo, o número 378 é divisível por 9 porque a soma dos seus algarismos é 18 e 18 é um múltiplo de 9; o número 123 não é divisível por 9 porque a soma dos seus algarismos é 6 e 6 não é um múltiplo de 9. Repare-se que um número que seja divisível por 9 é sempre divisível por 3, porque se a soma dos algarismos de um número for um múltiplo de 9 será também um múltiplo de 3. No exemplo anterior, o número 378 é divisível por 9 e por 3 porque a soma dos algarismos é 18 e 18 é múltiplo de 9, logo é múltiplo de 3. Contudo, nem todo o número divisível por 3 é divisível por 9, porque nem todos os múltiplos de 3 são múltiplos de 9. Por exemplo, o número 303 é divisível por 3 porque a soma dos seus algarismos é 6 e 6 é múltiplo de 3, mas não é divisível por 9 porque 6 não é múltiplo de 9.

Critério de divisibilidade por 4

Para apresentar o critério de divisibilidade por 4, consideremos como exemplo um número natural de 4 algarismos abcd e a sua decomposição polinomial:

$$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$$

Relativamente à divisibilidade por 4, o que podemos concluir? As parcelas que correspondem às ordens superiores a 2 são todas divisíveis por 4, uma vez que todos os múltiplos de 100 são divisíveis por 4, resta averiguar se cx10 + d é ou não divisível por 4:

$$abcd = \underbrace{a \times 10^3 + b \times 10^2}_{\text{é divisível por 4}} + \boxed{c \times 10 + d} \rightarrow$$

teremos de averiguar cx10 + d é divisível por 4

Concluímos que um número n ϵ IN é divisível por 4 se o número formado pelos seus dois últimos dígitos for múltiplo de 4.

Por exemplo, o número 120 é divisível por 4 porque o número formado pelos dois últimos algarismos (20) é um múltiplo de 4; o número 126 não é divisível por 4 porque o número formado pelos dois últimos algarismos (26) não é um múltiplo de 4.

TAREFA 12

1. Considere os seguintes números: 465076800, 100101000, 907116341

a) Quais são divisíveis por 3?

b) Quais são divisíveis por 9?

c) Se um número é divisível por 3, será divisível por 9?

d) Se um número é divisível por 9, será divisível por 3?

e) Ao verificarmos se um número é divisível por 3 podemos determinar o resto da sua divisão por 3?

2. Determine o(s) valor(es) de a de modo a que o número 3a5 seja divisível por 3.

3. Determine o valor de a de modo a que o número 240a seja divisível por 2 e por 5.

4. Determine o valor de b de modo que o número 482b seja divisível por 4 e por 9.

5. Determine os valores de a e de b de modo que o número 1b4a seja:

a) divisível por 5 e por 3.

b) divisível por 6 e por 5.

c) divisível por 2 e por 9.

2.1.4. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum

Máximo divisor comum

O **máximo divisor comum (mdc)** entre dois ou mais números naturais corresponde ao maior número natural que é divisor desses números. Observemos o seguinte exemplo:

mdc (6,8) = ?

$D_6 = \{1,2,3,6\}$ $D_8 = \{1,2,4,8\}$

Os divisores comuns são o 1 e o 2, o maior divisor comum é 2, logo ***mdc* (6,8) = 2**.

Quando o máximo divisor comum de dois (ou mais) números é 1, dizemos que os números são **primos entre si**, ou seja, se *mdc* (*a,b*) = 1 então *a* e *b* dizem-se primos entre si.

Existem várias formas para calcular o máximo divisor comum entre dois ou mais números. Uma delas consiste em listar os divisores dos números e identificar o maior divisor comum. Esta técnica é simples para números pequenos como vimos no exemplo anterior. Contudo, é normalmente mais rápido usar um segundo método que consiste em decompor os números em fatores primos. Usando este método, **o mdc entre dois ou mais números naturais é igual ao produto de todos os fatores primos comuns da decomposição, elevados cada um ao menor dos expoentes**. Vejamos o seguinte exemplo:

mdc (36,90) = ?

36	**2**
18	**2**
9	**3**
3	**3**
1	

90	**2**
45	**3**
15	**3**
5	**5**
1	

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$ $\qquad$ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$

mdc (36,90) = $2 \times 3^2 = 18$

Um outro método que podemos utilizar é o **algoritmo de Euclides**. O algoritmo de Euclides usa a divisão inteira para determinar o máximo divisor comum entre dois números, recorrendo a divisões sucessivas. O esquema seguinte ilustra o processo iterativo que é utilizado para determinar o mdc (a,b) através do algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} b & r_1 \\ \hline r_2 & q_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} r_1 & r_2 \\ \hline r_3 & q_3 \end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c|c} r_{n-2} & r_{n-1} \\ \hline r_n & q_n \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} r_{n-1} & r_n \\ \hline 0 & q_{n+1} \end{array}$$

O *mdc* (*a,b*) é o último resto não nulo do processo de divisões sucessivas.

Apliquemos o algoritmo de Euclides para determinar o *mdc* (90,36):

90	36		36	**18**
18	2		0	2

Concluímos que: *mdc* (90,36) = **18**.

Mínimo múltiplo comum

Tal como para o cálculo do máximo divisor comum, também para o cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc) entre dois ou mais números, podemos listar os primeiros múltiplos dos números e identificar o menor múltiplo comum. O **mínimo múltiplo comum** entre números naturais é o menor número natural, diferente de zero, que é múltiplo desses números. Observemos o seguinte exemplo:

mmc (6,8) =?

M_6 = {0,6,12,18,24,30,...} M_8 = {0,8,16,24,32,40, ...}

O menor múltiplo comum, diferente de zero, é 24, logo ***mmc* (6,8) = 24**.

Outra possibilidade é usar a decomposição em fatores primos. **O mmc entre 2 ou mais números naturais é igual ao produto de todos os fatores comuns e não comuns, elevados cada um ao maior dos expoentes**. Vejamos o seguinte exemplo:

mmc (36,90) = ?

36	**2**		**90**	**2**
18	**2**		**45**	**3**
9	**3**		**15**	**3**
3	**3**		**5**	**5**
1			**1**	

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$

mmc (36,90) = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

O mínimo múltiplo comum é útil na adição e subtração de frações com denominadores distintos. O mmc fornece um denominador comum mínimo que facilita a determinação de frações equivalentes no cálculo de expressões numéricas. Considere-se por exemplo:

$$\frac{2}{15} + \frac{5}{6} =$$

No exemplo acima, de modo a obter duas frações equivalentes que possuam o mesmo denominador, basta determinar *mmc* (15,6)= 30, logo:

$$\frac{2}{15} + \frac{5}{6} = \frac{4}{30} + \frac{25}{30} = \frac{29}{30}$$

Algumas propriedades do mdc e do mmc

- Quando $a,b \neq 0$, o mínimo múltiplo comum (mmc) e o máximo divisor comum (mdc) satisfazem a seguinte relação:

$$\text{mmc}\ (a,b) = \frac{a \times b}{\text{mdc}\ (a,b)} \Leftrightarrow a \times b = \text{mmc}\ (a,b) \times \text{mdc}\ (a,b)$$

Retomemos o exemplo acima, supondo que pretendemos determinar o *mmc* (36,90), conhecendo o *mdc* (36,90):

$$\text{mmc}\ (36,90) = \frac{36 \times 90}{\text{mdc}\ (36,90)} = \frac{3240}{18} = 180$$

- Entre dois números primos, o mmc é igual ao produto desses números.

Por exemplo, se $a = 3$ e $b = 5$, o *mmc* (3,5) = 3 × 5 = 15.

Entre dois números em que o maior é divisível pelo menor, o mmc será o maior desses números.

Por exemplo, se $a = 9$ e $b = 18$, o *mmc* (9,18) = 18.

- Ao multiplicar ou dividir dois números (a, b) por um outro número (c), divisor de a e de b, o mmc(a,b) é multiplicado ou dividido respetivamente por c, ou seja:

Sendo *mmc* (a,b) = k, então:

mmc (ca,cb) = ck e $mmc\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right) = \frac{k}{c}$

Por exemplo, se a = 10 e b = 15, o mmc (10,15) = 30 ; Se multiplicarmos a e b por 3, temos $a' = 30$ e $b' = 45$ e o mmc (30,45) = 30 × 3 = 90.

TAREFA 13

1. Calcule o mmc e o mdc entre:

a) (12, 15) b) (6, 14) c) (240, 300).

2. Numa árvore de Natal há lâmpadas vermelhas que piscam a cada 8 segundos, lâmpadas amarelas que piscam a cada 12 segundos e lâmpadas azuis que piscam a cada 15 segundos. As lâmpadas foram ligadas no mesmo instante. **Determine** ao fim de quanto tempo irão piscar simultaneamente.

3. O António é professor de pilates num ginásio. Em pilates estão inscritos 48 mulheres e 32 homens. O António quer formar grupos com o mesmo número de homens e de mulheres. **Indique** qual é o maior número de grupos que o António pode formar e quantos utentes de cada género terá cada grupo.

4. Com a, b ϵ N, sabe-se que a x b = 882 e que mdc (a, b) = 7.

a) **Determine** mmc (a, b).

b) **Indique** que valores podem tomar a e b, selecionando a opção correta.

- A (7, 119)
- B (14, 63)
- C (21, 42)
- D (18, 49)

5. O mdc entre 2 números é igual a 10 e o mmc é igual a 60. Sabendo que um dos números é 30, **determine** o outro.

2.2. Números inteiros

Como já foi referido o conjunto dos números naturais é infinito,|N={0, 1, 2, 3, 4, ...}, pois para cada número natural é sempre possível indicar o seu sucessor. Há contextos em que os números naturais não são adequados para representar as situações pretendidas. Por exemplo, quando se refere que, num dado local, a temperatura foi negativa ou quando se diz que o saldo da conta bancária é negativo, surge a necessidade de usar números menores que zero, isto é, usar **números negativos**.

Se juntarmos ao conjunto dos números naturais os números inteiros negativos obtém-se o conjunto dos **números inteiros**, que se representa usualmente por Z.

$$Z = \{..., -3,-2,-1,0,1,2,3...\}$$

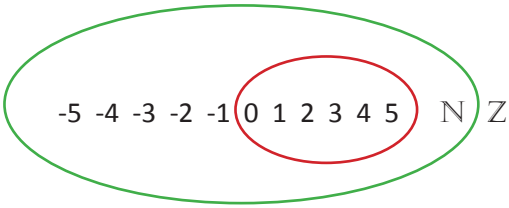
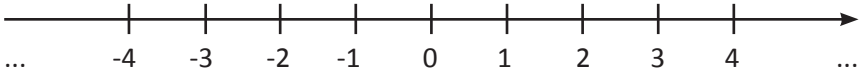


Figura 12 – Diagrama de Venn com a representação do conjunto dos números inteiros.

Tal como o conjunto dos números naturais, o conjunto dos números inteiros também é um conjunto infinito, pois para cada número inteiro é sempre possível indicar o seu sucessor e o seu antecessor.

Dois elementos de Z com sinais contrários dizem-se **números simétricos**. Por exemplo 3 e -3 são números simétricos. Dois números simétricos estão à mesma distância da origem da reta numérica.



O **valor absoluto** ou **módulo** de um número inteiro é a distância a que este se encontra da origem. O valor absoluto de um número inteiro n representa-se por $|n|$. Como verificamos no exemplo acima: $|-3|=|3|=3$, então dois números simétricos têm o mesmo valor absoluto. Note-se que o simétrico de zero é zero e o seu valor absoluto é zero ($|0| = 0$).

Tal como o conjunto dos números naturais, também o conjunto dos números inteiros é um conjunto ordenado. Repare-se que considerando a, b $\in$ Z, diz-se que a < b se existir um número c $\in$ N tal que a + c = b. Nesta relação de ordem existe transitividade, tricotomia e monotonia:

- Transitividade $\forall a,b,c \in Z$, se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.
- Tricotomia Se a, $b \in Z$, então $a < b$ ou $a > b$ ou $a = b$.
- Monotonia $\forall a,b,c \in Z$, se $a < b$ então $a + c < b + c$.

2.2.1. Operações com números inteiros

Adição e subtração em Z

Para cada par de números inteiros *a* e *b*, a soma de *a* com *b* é também um número inteiro, que se representa por a + b. A adição em Z verifica as seguintes propriedades:

- *Comutativa*: $a + b = b + a$, $\forall a,b \in Z$;
- *Associativa*: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b,c \in Z$;
- *Elemento neutro*: $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in Z$;
- *Elemento inverso* (ou simétrico): para todo o inteiro *a*, existe um inteiro que designamos por $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0, \forall a \in Z$.

Verifica-se ainda que:

- A soma de dois números inteiros negativos é um número negativo;
- A soma de dois números de sinais contrários não simétricos é um número:
  - positivo, se a parcela com maior valor absoluto for positiva;
  - negativo, se a parcela com maior valor absoluto for negativa;

- A soma de dois números simétricos é igual a zero.

Podemos definir a subtração em Z a partir da adição em Z. Dados dois números inteiros a e b existe um único inteiro x, tal que $b + x = a$. Diz-se que x é a diferença entre a e b e escreve-se $x = a - b$.

Note-se que a subtração é sempre possível em Z, mas nem sempre é possível em N. Por exemplo, a subtração 3 - 4 é possível em Z, mas não é possível em N. Note-se ainda que, na subtração em Z, não se verifica a propriedade comutativa (por exemplo, $3 - 5 \neq 5 - 3$), nem a propriedade associativa (por exemplo, $3 - (5 - 4) \neq (3 - 5) - 4$), nem a existência de elemento neutro (por exemplo, $0 - (-5) = 5$).

Multiplicação em Z

Para cada par de inteiros a e b, o produto de a por b é também um número inteiro, que se representa por a x b. A multiplicação em Z verifica as seguintes propriedades:

- *Comutativa*: $a \times b = b \times a, \forall a,b \in Z$;
- *Associativa*: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a,b \in Z$;
- *Elemento neutro*: $a \times 1 = 1 \times a = a, \forall a \in Z$;
- *Distributiva da multiplicação em relação à adição ou em relação à subtração:*

  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \ \forall a,b,c \in Z$

  $a \times (b - c) = a \times b - a \times c, \quad \forall a,b,c \in Z$

Verifica-se ainda que:

- O produto de dois números inteiros com o mesmo sinal é sempre positivo.
- O produto de dois números inteiros com sinais diferentes é sempre negativo.

A divisão não está definida em todo o conjunto dos números inteiros pois podemos dividir um inteiro por outro e obter um número não inteiro. Por exemplo, 1 e 2 são números inteiros, contudo, 1 ÷ 2 = 0,5 e 0,5 não pertence a Z. Dizemos então que a divisão não é uma operação sobre Z.

2.3. Números racionais

Em Z, o cálculo 3 ÷ 2 não tem solução. Contudo, na realidade eu posso dividir 3 pizas por 2 pessoas. Os **números racionais** surgem para dar significado a estas situações. O conjunto dos números racionais, designa-se por Q e é constituído por elementos da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$.

$$Q = \{x : x = \frac{a}{b}, a,b \in Z, b \neq 0\}$$

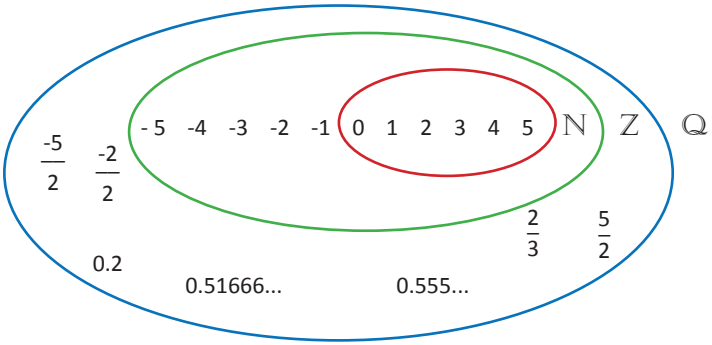


Figura 13 – Diagrama de Venn com a representação do conjunto dos números racionais.

Note-se que o conjunto Z está contido em Q ou, de outra forma, Q contém Z o que significa que todos os números inteiros são números racionais. De facto, é sempre possível representar um número inteiro na forma de fração. Por exemplo, o número 1 pode representar-se na forma $\frac{1}{1}$ ou $\frac{5}{5}$, por exemplo.

2.3.1. Frações

Tipos de frações

Atendendo às suas caraterísticas, as frações podem ser designadas de diferentes formas. Usando como critério a comparação com a unidade, temos frações iguais à unidade, quando o numerador é igual ao denominador ($\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$). Quando, numa fração, o numerador é menor que o denominador, a fração representa um número menor do que 1 e designa-se por **fração própria**. Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{7}$ são frações próprias. Quando, numa fração, o numerador é maior que o denominador, a fração representa um número maior que 1 e designa-se por **fração imprópria**. Por exemplo, as frações $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{25}{7}$ são frações impróprias.

As frações impróprias podem ser representadas na forma de **numeral misto**. Mas o que é um numeral misto? Consideremos por exemplo a fração $\frac{25}{7}$, que é uma fração imprópria; para representar este número na forma de numeral misto temos de fazer a divisão inteira de 25 por 7. A parte inteira deste quociente é 3 porque 3x7=21 e o resto da divisão inteira é 4. Conclui-se então que: $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$. O numeral misto equivalente à fração $\frac{25}{7}$ escreve-se $3\ \frac{4}{7}$ e lê-se três e quatro sétimos. Um numeral misto tem uma parte inteira, que neste caso é 3 e uma parte fracionária que neste caso é $\frac{4}{7}$. Caso se pretenda transformar um numeral misto em fração basta separar a parte inteira da parte fracionária e adicionar os dois números. Por exemplo, para escrever o numeral misto $2\frac{3}{5}$, na forma de fração, fazemos: $2\frac{3}{5} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{10}{5} + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$.

Se o denominador de uma fração é uma potência de 10 (10, 100, 1000, ...) as frações designam-se por **frações decimais**. Por exemplo, as frações $\frac{3}{10}, \frac{245}{100}, \frac{7}{1000}$ são frações decimais e facilmente assumem uma representação decimal: 0,3; 2,45 e 0,007, respetivamente.

Toda a fração com numerador 1 designa-se por **fração unitária**. Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{15}$ são frações unitárias.

Frações equivalentes

Em *Q*, diz-se que duas **frações são equivalentes quando representam a mesma quantidade**. Nesse caso, temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e só se $a \times d = b \times c$. Um exemplo de frações equivalentes são as frações que representam a metade,

frações do tipo $\frac{a}{2a}$, $a \in Z$, de que são exemplo as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{100}{200}$. Por outro lado, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ se e só se $a \times d > b \times c$.

O modelo retangular permite mostrar visualmente a equivalência de frações. Considerem-se as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, como $\frac{1}{2}$ de uma folha A_4, $\frac{2}{4}$ de uma folha A_4 e $\frac{4}{8}$ de uma folha A4, a figura 14 mostra a representação destas quantidades. Facilmente concluímos que qualquer das frações representa a metade.

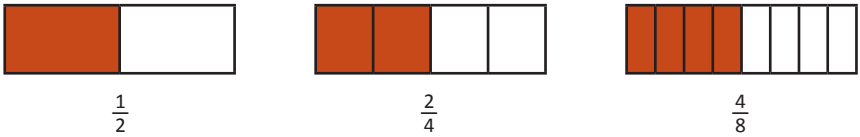


Figura 14 – Representação, no modelo retangular, de frações equivalentes à metade.

De facto, o **princípio de equivalência de frações**, define que se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fração pelo mesmo número inteiro, diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração inicial. A figura 15 ilustra este princípio.

Figura 15 – Ilustração do princípio da equivalência de frações.

Este princípio é muito útil para simplificar uma fração, isto é, para obter uma fração equivalente com termos menores. Por exemplo, para simplificar a fração $\frac{12}{36}$ podem dividir-se ambos os termos por 12, obtendo-se a fração $\frac{1}{3}$. A fração $\frac{1}{3}$ não se pode simplificar mais, por isso, diz-se que $\frac{1}{3}$ é uma **fração irredutível**.

A importância da unidade

No estudo das frações, nos primeiros anos de escolaridade, uma dificuldade prende-se com a questão da unidade tomada como o todo a ser fracionado. Por exemplo, metade de um quilo de maçãs não é o mesmo que metade de dois quilos de maçãs; tal como metade de uma folha A_4 não é o mesmo que metade de uma folha A_5. É importante perceber que a fração $\frac{1}{2}$, em contexto, pode representar quantidades diferentes, dependendo

da unidade que tomo como todo. Adicionalmente, num mesmo contexto, podemos identificar várias frações com diferentes significados. Consideremos a figura 16, onde se representaram 8 círculos coloridos.

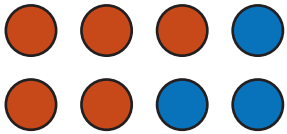


Figura 16 – Oito círculos coloridos (Fonte: Lamon, 2006).

Relativamente à figura podemos considerar várias frações. Vejamos alguns exemplos:

- Se o conjunto dos 8 círculos é a unidade, $\frac{5}{8}$ representa a parte de círculos laranja;
- Se cada grupo de 4 círculos é a unidade, $1\frac{1}{4}$ representa a parte de círculos laranja;
- Se cada 2 círculos é a unidade, $2\frac{1}{2}$ representa a parte de círculos laranja;
- $\frac{5}{3}$ representa a razão entre o número de círculos laranja e o número de círculos azuis.

Do ponto de vista pedagógico, no estudo das frações, é fundamental discutir com os alunos tarefas que envolvam a noção de unidade, nomeadamente tarefas de reconstrução da unidade, onde os alunos poderão refletir sobre as relações entre a parte e o todo. Por exemplo, apresentar um retângulo, referindo que representa $\frac{1}{2}$ de uma tira de papel e pedir para desenharem a tira de papel completa; ou apresentar 5 berlindes, referindo que os 5 berlindes correspondem a $\frac{1}{3}$ de um conjunto de berlindes e questionar qual o número de berlindes desse conjunto.
Devem também ser objeto de especial cuidado, os problemas em que há mudança da unidade de referência. Por exemplo, no problema: "O João comeu metade de um chocolate e a Maria comeu metade da parte do chocolate que o João não comeu, que parte do chocolate so-

brou?", a unidade muda (a Maria come parte de uma parte do chocolate). Contudo, a fração $\frac{1}{4}$, que é a resposta ao problema, obtida pela expressão numérica, $1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})$, refere-se novamente à unidade inicial, o chocolate inteiro, ou seja, resta $\frac{1}{4}$ do chocolate inteiro.

2.3.2. Operações entre números racionais

As quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) são fechadas em Q, o que significa que operando dois números racionais por qualquer destas operações, obtém-se sempre um número racional. Para adicionar ou subtrair números racionais, na forma de fração, é necessário que as frações tenham o mesmo denominador:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

O produto de dois números racionais, na forma de fração, é uma fração cujo numerador se obtém multiplicando os numeradores e cujo denominador se obtém multiplicando os denominadores das frações:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

O quociente de dois números racionais, na forma de fração, é igual ao produto do primeiro número pelo inverso do segundo:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

2.3.3. Dízimas

Podemos perguntar: se os números racionais são elementos da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$, porque é que algumas dízimas são números racionais? De facto, quer as dízimas finitas, quer as dízimas infinitas periódicas são números racionais, porque podem sempre ser representadas na forma de fração. Vejamos os seguintes exemplos:

- Dízimas finitas:

$\frac{1}{2} = 0,5$ $\quad -\frac{5}{4} = -1,25$ $\quad \frac{75}{20} = 3,75$

- Dízimas infinitas periódicas:

$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$ $\quad \frac{7}{6} = 1,1666... = 1,1(6)$ $\quad \frac{6}{7} = 0,857142857142... = 0,8571(428571)$

O período de uma dízima periódica é formado pelos algarismos que se repetem na parte decimal. Por exemplo, a dízima 0,333... tem período 3. Quando a dízima possui um ou mais algarismos antes do período, esses algarismos são chamados de anteperíodo. Por exemplo, na dízima 1,1666... o período é 6 e o anteperíodo é 1.

Se tomarmos uma dízima infinita periódica podemos transformá-la em fração usando um algoritmo muito simples. Vejamos o exemplo da dízima 0,(7):

Consideremos $x = 0,(7) = 0,777...$

Multiplicando x por 10, temos: $10x = 7,777...$

Subtraindo membro a membro: $10x - x = 7,777... - 0,777... \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9x = 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{7}{9}$

No exemplo acima, como não existe anteperíodo e o período tem um algarismo, bastou multiplicar a dízima x por 10. Subtraindo x a 10x a parte decimal é nula, obtendo-se facilmente a fração que gera a dízima.

Vejamos agora outro exemplo. Na dízima 1,3535... não há anteperíodo e o período é 35. Nesta situação temos de multiplicar a dízima por 100, usando o algoritmo anterior:

Consideremos $x = 1,(35) = 1,3535...$

Multiplicando x por 100, temos: $100x = 135,3535...$

Subtraindo membro a membro: $100x - x = 135,3535... - 1,3535... \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 99x = 134 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{134}{99}$

No uso deste algoritmo temos de escolher multiplicar a dízima por uma potência de 10 (10, 100, 1000, ...) em função do número de algarismos do período.

Quando uma dízima periódica tem anteperíodo, em primeiro lugar temos de isolar o período na parte decimal da dízima e depois operar a dízima de modo a conseguir anular a parte decimal. Vejamos o exemplo da dízima 1,2333...:

Consideremos $x = 1{,}2(3) = 1{,}2333...$

Multiplicando x por 10, temos: $10x = 12{,}333...$

Multiplicando x por 100, temos: $100x = 123{,}333...$

Subtraindo membro a membro: $100x - 10x = 123{,}333... - 12{,}333... \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 90x = 111 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{111}{90}$$

2.3.4. Densidade

Uma grande diferença entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais é a densidade. Entre dois números inteiros consecutivos não há outro número inteiro, mas é fácil perceber que entre dois números fracionários existe uma infinidade de números. Por exemplo, entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ há uma infinidade de números, assim como entre 0,1 e 0,2 também há uma infinidade de números. Por este facto, o conjunto dos números racionais é um **conjunto denso** (tal como o conjunto dos números reais, que definiremos de seguida). Já o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros são **conjuntos discretos**.

Alguns exemplos de números que existem entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, podem ser facilmente obtidos determinando frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, com o mesmo denominador. Se multiplicarmos ambos os termos da fração $\frac{1}{3}$ por 20 e ambos os termos da fração $\frac{1}{2}$ por 30, obtemos, respetivamente, as frações $\frac{20}{60}$ e $\frac{30}{60}$, que são frações equivalentes, respetivamente a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. Facilmente, iden-

tificamos as frações $\frac{21}{60}$, $\frac{22}{60}$, $\frac{23}{60}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{25}{60}$, $\frac{26}{60}$, $\frac{27}{60}$, $\frac{28}{60}$, $\frac{29}{60}$ como frações maiores que $\frac{20}{60}$ e menores que $\frac{30}{60}$. Contudo, não esqueçamos que a quantidade de números entre quaisquer números racionais é infinita. De facto, basta multiplicar por 10 ambos os termos das frações $\frac{20}{60}$ e $\frac{30}{60}$, obtendo as frações $\frac{200}{600}$ e $\frac{300}{600}$ para conseguir identificar mais números entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ e facilmente percebemos que podemos continuar este processo infinitamente.

TAREFA 14

1. Dê dois exemplos de números racionais compreendidos entre $\frac{5}{7}$ e $\frac{6}{7}$, ou seja, dois números da forma $\frac{m}{n}$ que satisfazem a dupla desigualdade $\frac{5}{7} < \frac{m}{n} < \frac{6}{7}$.

2. Observe a seguinte tira.

Tira de Chris Browne, in Menezes & Flores (2017)

2.1. Descreva a situação apresentada na tira. Que intenção terá tido o protagonista desta situação e que estratégia usou?

2.2. Imagine que o Chiripa chega a $9\frac{7}{8}$. **Explique** a que estratégia pode recorrer para adiar ainda mais o início do ataque.

3. Quantos números existem entre 2 e $2\frac{1}{5}$? **Justifique** a sua resposta.

4. Transforme em fração os números racionais:

(a) 0,006 (b) 0,(2) (c) 2,(34) (d) 7,99... (e)2,6(27)

5. Apresente a expressão matemática que traduz cada um dos problemas.
(a) O João comeu metade de uma pizza e o Pedro uma terça parte. Que porção de pizza sobrou?

(b) A Maria comeu $\frac{1}{6}$ de um chocolate e a Ana o triplo da quantidade comida pela Maria. Que quantidade de chocolate comeram as duas amigas?

(c) O Rui comeu $\frac{2}{5}$ do um bolo e a Sara comeu uma terça parte do que o Rui comeu. Que parte do bolo comeu a Sara?

(d) O Luís tem 6 chocolates e vai dar metade de um chocolate a cada amigo. Para quantos amigos chegam os chocolates?

(e) Depois da sua festa de aniversário sobrou meio bolo que a Rita vai levar para a escola, para partilhar ao lanche com 3 amigas. Que parte do bolo irá comer cada menina?

6. Considere cada uma das seguintes expressões numéricas.

A $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ B $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ C $1 - \frac{1}{4}$ D $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$

6.1. Traduza-as em linguagem natural.

6.2. Formule o enunciado de um problema para cada uma delas.

7. Traduza em linguagem matemática cada uma das seguintes frases.

7.1. O quociente do cubo de dois por um terço.

7.2. A diferença entre o quociente de um por dois quintos e dois ao quadrado.

7.3. O produto da soma de cinco meios com dois pelo quadrado de dois quintos.

8. Explique a razão pela qual o problema abaixo é impossível. Na preparação de um sumo o Pedro gastou $\frac{1}{4}$ das laranjas que tinha, tendo-lhe sobrado 7 laranjas. Quantas laranjas tinha o Pedro inicialmente?

9. O enigma de Diofanto.

A história conservou poucos dados sobre Diofanto. Tudo o que se conhece a seu respeito encontra-se no seguinte epigrama que figura no seu túmulo e está escrito sob a forma de um enigma matemático:

Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números dirão quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte foi a sua bela infância. Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos. E a sétima parte de sua existência decorreu até tomar esposa. Passou mais um quinquênio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho.

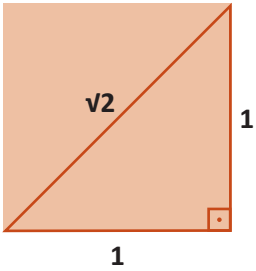
Diga quantos anos tinha Diofanto quando morreu.

2.4. Números Reais

O conjunto dos números reais, designado por R, é o conjunto formado por todos os números racionais e todos os números irracionais. Registe-se que os números naturais e os números inteiros são casos particulares de números racionais, por isso quando dizemos que um número é racional, fica aberta a possibilidade de ele ser um número inteiro (positivo ou negativo) ou simplesmente um número natural.

$$R = \{x : x \text{ é racional ou } x \text{ é irracional}\}$$

Mas o que são números irracionais? Como o próprio nome indica, um número irracional não é racional, isto é, um número irracional é todo o número que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Os números irracionais são, assim, todos os números cuja representação decimal não *é* finita nem infinita periódica. Provavelmente foi na escola pitagórica, no século V a.C., que estes números terão sido descobertos. Contudo, estes números contrariavam o pensamento filosófico da época em que tudo no universo poderia ser reduzido a números racionais, o que fez com que essas descobertas tenham permanecido escondidas. A descoberta de um dos primeiros irracionais deriva precisamente da aplicação do teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Se considerarmos um quadrado de lado 1, o comprimento da sua diagonal é $\sqrt{2}$ (fig. 17).



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d = \sqrt{2}$$

Figura 17 – Comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1.

Vamos então provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Vamos fazer uma prova por redução ao absurdo, partindo do pressuposto que $\sqrt{2}$ é um número racional, que é o mesmo que dizer que existem um $a \in Z$ e um b

$\in Z$, tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Suponhamos então que:

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a, b \in Z$ e a e b são primos entre si

$\Leftrightarrow \sqrt{2}^2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$ (significa que a^2 é um número par)

Ora, para a^2 ser par, a tem de ser par, porque se a fosse ímpar, a^2 seria ímpar.

Então se a é par, posso dizer que $a = 2k$, substituindo na expressão acima, temos:

$2b^2 = (2k)^2 \Leftrightarrow 2b^2 = 4k^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2$ (significa que é um número par)

Chegámos a um absurdo que é dizer que a é par e que b é par, o que não pode acontecer se a e b são primos entre si, o que significa que não têm outros fatores em comum além de 1. Ora se a e b fossem ambos pares teriam outro fator comum, o 2. Ou seja, não é possível escrever $\sqrt{2}$ na forma $\frac{a}{b}$ sendo a e b números inteiros, primos entre si, o que leva a concluir que $\sqrt{2}$ é irracional.

Há muitos números irracionais famosos, além da $\sqrt{2}$, por exemplo, temos outras raízes como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{7}$ e o famoso **número pi** (π). O pi é um número irracional que representa a razão entre o perímetro (P) e o diâmetro (d) de uma circunferência: $\pi = \frac{P}{d}$. Desde a antiguidade, que sempre se procurou determinar o valor exato de π, tarefa impossível já que π é irracional. Sem pretendermos ser exaustivos, o quadro 5 apresenta alguns valores aproximados de π, até ao século V d.C.

Origem/ autor	Data	Aproximação de π
Babilónia	2000 a.C.	$3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$
Egipto – Papiro de Rhind	1650 a.C.	$(\frac{16}{9})^2 = 3{,}160493827$
Grécia - Arquimedes	± 250 a. C.	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ $3{,}1408... < \pi < 3{,}1429...$
Alexandria - Ptolomeu	± 150 d. C.	$\frac{377}{120} = 3{,}141(6)$
China – Tsu Ch'ung Chih	± 480 d. C.	$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$
Índia - Aryabhata	499 d. C.	$\frac{62832}{20000} = 3{,}1416$

Quadro 5 – Aproximações de π ao longo da história.

No final da idade média e entre os séculos XV e XX muitos foram os avanços nos métodos matemáticos utilizados, que permitiram aproximações sucessivamente mais exatas de π. Na atualidade, apesar de já serem conhecidos biliões de casas decimais de π, há matemáticos que, com a ajuda de poderosos computadores, procuram determinar mais dígitos desta dízima infinita não periódica.

O **número ou razão de ouro** (ϕ) é outro exemplo famoso de um número irracional que desde a antiguidade despertou a curiosidade de matemáticos, filósofos e artistas, ao buscarem as proporções que estão presentes na natureza. O número de ouro pode ser obtido algebricamente a partir da divisão de um segmento de reta. Consideremos [*AB*] e um ponto C desse segmento de reta. Consideremos ainda que $\overline{AC} = a$ e que $\overline{CB} = b$ e que a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual à razão entre $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$. Então temos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = x$$

Da igualdade: $\frac{a}{b} = x$, temos que $a = bx$.

Fazendo a substituição na igualdade: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, temos:

$$\frac{(bx+b)}{bx} = \frac{bx}{b} \Leftrightarrow \frac{b(x+1)}{bx} = \frac{bx}{b} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Tratando-se de razões entre comprimentos, interessa a solução positiva. A razão obtida é a razão de ouro: $\phi = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. A este número equivale a dizima infinita não periódica 1,61803398... .

O número de ouro exerceu uma grande influência na arquitetura da época clássica. Por exemplo, no templo de Parthenon, na Grécia, cuja fachada é retangular, está presente a razão de ouro nas suas dimensões, isto é, o retângulo é designado por retângulo de ouro. Também na arte encontramos a razão de ouro. Talvez o exemplo mais conhecido seja o quadro *Mona Lisa* de Leonardo da Vinci, onde é possível encontrar esta razão, por exemplo, entre o tronco e a cabeça e nas posições relativas dos olhos e da boca.

O retângulo de ouro pode obter-se facilmente a partir de um quadrado de quaisquer dimensões (fig. 18). Considere-se o quadrado [*ABDC*], de

lado *x*, dividido ao meio pelo segmento de reta [EF]. De seguida traça-se um arco de circunferência de raio $\overline{FC}$ com vértice em *F*. Prolonga-se a semirreta $\dot{B}D$ até que esta intersete o arco de circunferência. Traça-se uma reta perpendicular a *BG* e que passe no ponto *G* e prolonga-se a semirreta $\dot{A}C$ até que esta intersete a perpendicular traçada. O retângulo [*ABGH*] é um retângulo de ouro, em que $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \phi$.

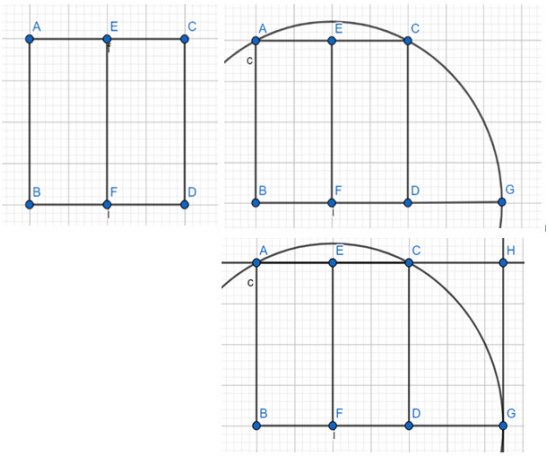


Figura 18 – Um processo de construção do retângulo de ouro.

A razão de ouro pode ser encontrada em diversos elementos da natureza, quer em plantas, quer em animais. Antes de referir alguns exemplos, é incontornável referir uma das mais famosas e interessantes sequências, a sequência de Fibonacci. Fibonacci, matemático italiano, descreveu, no início do século XIII, uma sequência, cujo primeiro termo é 1, o seguinte termo é 1, e cada um dos termos seguintes se obtém adicionando os 2 termos anteriores. A sequência de Fibonacci pode ser definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \ n \geq 3 \end{cases}$$

E vai gerar os seguintes termos; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, … . Esta sequência, entre muitos outros aspetos interessantes, tem a particularidade das razões entre termos consecutivos se aproximarem, gradualmente, de ϕ. A partir dos termos da sequên-

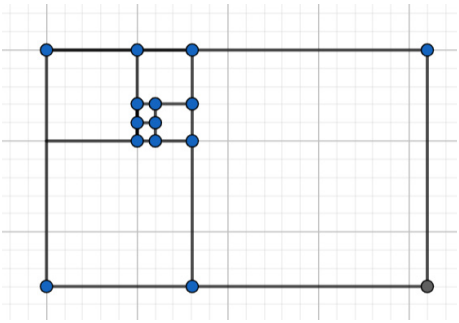


Figura 19 – Retângulo de ouro e sequência de Fibonacci.

cia de Fibonacci é possível construir retângulos em que a razão entre o comprimento e a largura se aproxima do número de ouro. Vejamos o exemplo da figura 19, onde se usaram os termos 13 e 21, respetivamente como largura e comprimento do retângulo. Repare-se que é possível decompor esse retângulo em quadrados cujos lados têm comprimentos iguais aos primeiros termos da sequência: 2 quadrados menores de lado 1, um quadrado de lado 2, outro de lado 3, outro de lado 5, outro de lado 8 e outro de lado 13.

Tendo como base a construção anterior, é possível traçar uma espiral com início no vértice de um dos quadrados, fazendo com que os seus arcos concêntricos atravessem os sucessivos quadrados, como se ilustra na figura 19. Podemos reconhecer esta espiral em muitos elementos naturais. A figura 20 evidencia esta relação com um cefalópode, o nautilus.

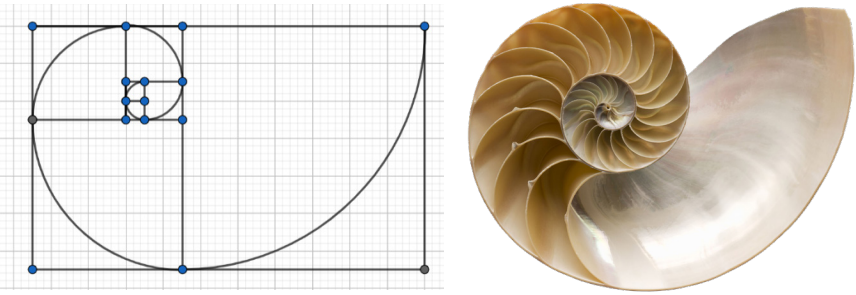


Figura 20 – Comparação entre a espiral do retângulo de ouro e a concha do nautilus.

Exercícios e problemas resolvidos

1. Mostre que em N:

a) o quadrado de um número ímpar é um número ímpar.

Considerando que $2n-1$ representa um número ímpar (com $n \in N$), podemos traduzir a afirmação da seguinte forma: $(2n-1)^2 = 2k \pm 1$ $n, k \in N$,. Vamos então transformar o primeiro membro de forma a tentar obter um ímpar na forma $2k \pm 1$.

$$(2n - 1)^2 =$$

$$= 4n^2 - 4n + 1 =$$

$$= 2(2n^2 - 2n) + 1 = \qquad 2(2n^2 - 2n) \text{ é um número par, } \forall\, n \in N.$$

$$= 2k + 1$$

Concluímos assim que o quadrado de qualquer número ímpar é um número ímpar.

b) a soma de um número com o seu quadrado é sempre um número par.

Um número natural (N) pode ser par ($N = 2n$) ou ímpar ($N = 2n - 1$). Considerando as duas possibilidades, podemos traduzir a afirmação da seguinte forma:

$$2n + (2n)^2 = 2k_1 \wedge 2n - 1 + (2n - 1)^2 = 2k_2,\ n, k \in N$$

Vamos transformar o primeiro membro de cada uma das condições da conjunção acima de forma a tentar obter um par na forma 2k.

Se N for par:	Se for ímpar:
$2n + (2n)^2 =$	$2n - 1 + (2n - 1)^2 =$
$= 2n + 4n^2 =$	$= 2n - 1 + 4n^2 - 4n + 1 =$
$= 2(n + 2n^2) =$	$= 4n^2 - 2n =$
$= 2k_1$	$= 2(2n^2 - n) =$
	$= 2k_2$

Concluímos assim que a soma de um número com o seu quadrado é sempre um número par.

2. Numa divisão inteira, o dividendo é 55 e o resto é 13. **Determine** que valores podem ter o divisor e o quociente.

Sabemos que $D = d \times q + r$ (identidade fundamental da divisão)

Logo, nesta situação, temos: $55 = d \times q + 13 \Leftrightarrow d \times q = 55 - 13 \Leftrightarrow d \times q = 42$

Sabemos também que se o resto é 13, $q > 13$

Para descobrir o divisor e o quociente, basta identificar os divisores de 42 e selecionar quais é que respeitam a restrição acima.

$$D_{42} = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$$

O problema tem assim 3 soluções:

$$\begin{cases} d = 14 \\ q = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} d = 21 \\ q = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} d = 42 \\ q = 1 \end{cases}$$

3. Sendo $k = a \times b$, com a e b números primos, **indique** os divisores de:

a) $3k$

$D_{3k} = \{1,3,a,b,ab,3a,3b,3ab\}$

b) ak

$D_{ak} = \{1,a,b,a^2,ab,a^2b\}$

4. Determine *a* e *b*, de modo a que 3*a*2*b* seja divisível por 4 e 9, simultaneamente.

Para que 3*a*2*b* seja divisível por 4 e 9 têm de se verificar as seguintes condições:

- O número formado pelos algarismos das dezenas e unidades (neste caso 2b) tem de ser múltiplo de 4;
- A soma dos algarismos do número tem de ser um múltiplo de 9.

Então, pela primeira condição, temos que $b = 0 \vee b = 4 \vee b = 8$;

Quando $b = 0$, pela segunda condição, temos que

$$3 + a + 2 + 0 = 9^{\cdot} \Leftrightarrow a + 5 = 9^{\cdot} \Leftrightarrow a = 4.$$

Quando $b = 4$, pela segunda condição, temos que

$$3 + a + 2 + 4 = 9^{\cdot} \Leftrightarrow a + 9 = 9^{\cdot} \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 9$$

Quando $b = 8$, pela segunda condição, temos que

$$3 + a + 2 + 8 = 9^{\cdot} \Leftrightarrow a + 13 = 9^{\cdot} \Leftrightarrow a = 5.$$

O problema tem assim 4 soluções:

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 4 \\ a = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 4 \\ a = 9 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 8 \\ a = 5 \end{cases}$$

5. Para completar uma determinada prova de atletismo, os atletas têm que fazer 7 vezes o mesmo percurso. A Joana demora 25 minutos a completar uma volta e a Luísa demora 30 minutos. Iniciaram a prova às 9h15m. Em algum momento da prova voltarão a cruzar-se no ponto de partida? Se sim, a que horas?

O momento em que se voltam a cruzar corresponde ao *mmc*(25,30). O *mmc*(25,30) = 150, logo voltam a cruzar-se às 11h45m.

6. Uma editora pretende enviar livros para várias escolas. Em stock, têm 75 exemplares do livro de adivinhas, 120 do romance e 165 do livro de aventuras. A editora irá proceder ao envio em embalagens, cada uma com os três tipos de livros em quantidades iguais e com o maior número possível de exemplares de cada tipo. **Determine** quantos livros de aventuras terá cada embalagem.

Para responder precisamos de determinar o *mdc* (75, 120, 165) . O *mdc* (75, 120, 165) = 15 . A editora poderá dividir os livros em 15 embalagens. Logo cada embalagem terá 11 livros de aventuras.

7. Mostre que:

a) 0,(17) é um número racional.

$x = 0,(17)$

$100x = 17,(17)$

$100x - x = 17,(17) - 0,(17) \Leftrightarrow 99x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{99}$.

b) 0,(3) + 0,(6) é um número natural.

$x = 0,(3) + 0,(6) = 0,(9)$

$10x = 9,(9)$

$10x - x = 9,(9) - 0,(9) \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1$.

Exercícios e problemas globais

1. Mostre, em N, que o produto entre um número par e um número ímpar é um número par.

2. Mostre que a diferença entre os quadrados de dois números naturais consecutivos é sempre um número ímpar.

3. Numa divisão inteira o dividendo é 76 e o resto é 10. **Determine** que valores podem assumir o divisor e o quociente.

4. Determine os valores de a e de b para os quais:

a) o número $5a10b$ é simultaneamente divisível por 3 e por 4.

b) o número $1a62b$ é simultaneamente divisível por 3, 4 e 5.

c) o número $2b5a$ é simultaneamente divisível por 5 e por 9.

5. O Luís, a Rita e o António são médicos e dão consultas num consultório privado. O Luís dá consultas nesse consultório de 10 em 10 dias, a Rita de 12 em 12 dias e o António de 15 em 15 dias. Sabendo que estiveram os três no consultório no dia 4 de janeiro de 2022, **determine** em que dia se voltarão a encontrar.

6. Considere dois números primos entre si, em que o mmc é igual a 120. Sabendo que um dos números é 8, **determine** o outro.

7. Considere dois números naturais a e b, tal que mdc $(a, b) = 4$ e *mmc* $(a, b) = 24$. Determine os valores de a e b, sabendo que b se obtém adicionando 4 unidades a a.

8. De um triângulo escaleno sabe-se que a medida de cada um dos seus lados é um número natural, a, b, c, tais que:

- $a < b < c$
- $mdc\ (a,b) = 1$
- $mdc\ (b,c) = 1$
- $mdc\ (a,c) = 3$
- $mmc\ (a, b, c) = 30$

Determine a medida de cada um dos lados do triângulo.

9. Considere a seguinte situação: "A Maria comeu $\frac{1}{6}$ de um bolo de chocolate e a Ana comeu o dobro da quantidade comida pela Maria."

9.1. **Apresente** uma expressão matemática que traduza a quantidade de bolo que as duas amigas comeram.

9.2. **Calcule** a fração de bolo que sobrou.

10. Na Escola de Cima há três turmas de 5.º ano. Na turma A, há 27 alunos, sendo os rapazes o dobro das raparigas. Na turma B, que tem 28 alunos, há mais dois rapazes que raparigas. Na turma C, $\frac{2}{3}$ dos alunos são raparigas e há 7 rapazes. **Indique**, quantos rapazes e quantas raparigas tem cada uma das turmas.

11. Em cada situação, **formule** um problema que possa ser traduzido pela expressão numérica.

a) $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{1}{2}:2$

12. Determine o número que:

a) adicionado a $\frac{2}{5}$ é igual a $\frac{7}{10}$. **b)** dividido por 3 é igual a $\frac{7}{15}$.

13. Mostre que 1,(45) é um número racional.

14. Determine a fração geradora de 0,(205).

15. Indique o valor lógico das seguintes afirmações.

a) Se a é um múltiplo de 3, então a é múltiplo de 6.

b) Todos os números primos são ímpares.

c) Entre 1,1 e 1,2 existem exatamente 9 números racionais.

d) Se o mdc(a,b)=2 e axb=12, então a=3 e b=4.

e) Os conjuntos N e Z são discretos e os conjuntos Q e R são densos.

f) Uma dízima finita é um número real.

g) Um número composto é um número com 3 ou mais divisores.

h) Uma dízima infinita periódica é um número racional.

i) Entre dois números racionais existe uma infinidade de números inteiros.

j) Entre dois números inteiros existe uma infinidade de números racionais.

k) O conjunto dos números racionais contém o conjunto dos números inteiros e está contido no conjunto dos números reais.

l) Todo o número real é irracional.

m) Considere k como um número primo, então ak é múltiplo de k, se a é natural.

n) Toda e qualquer dízima é um número real.

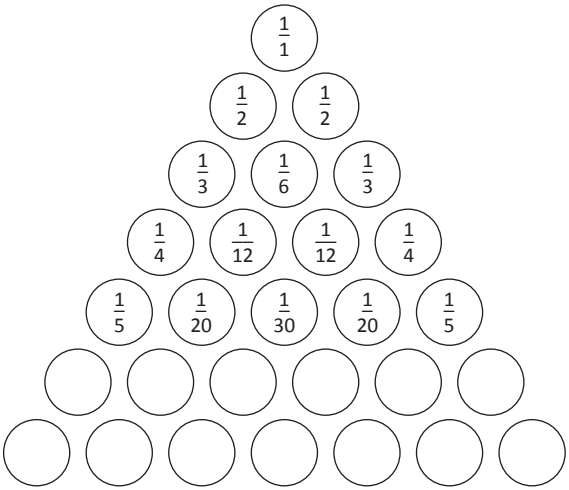
16. Escreva os números do conjunto Z que estão entre -2,(3) e $\frac{7}{3}$.

17. Considere o conjunto $A = \{0,3;\ 0;\ 1,1\ (3);\ \frac{13}{4};\ \pi; \frac{17}{5}\ ;\ 5; \frac{8}{10}\}$

a) Escreva os números 0,3 e 1,1(3) na forma de fração irredutível.

b) De todos os elementos que pertencem ao conjunto A, **indique** os que pertencem ao conjunto dos números racionais (Q) .

18. A figura seguinte representa as primeiras cinco linhas do triângulo harmónico construído por Leibniz no século XVII, a partir do triângulo de Pascal.



a) Que regularidade existe entre duas linhas consecutivas do triângulo harmónico? **Investigue e explique** o seu raciocínio.

b) **Escreva** as linhas 6 e 7 do triângulo, usando frações irredutíveis.

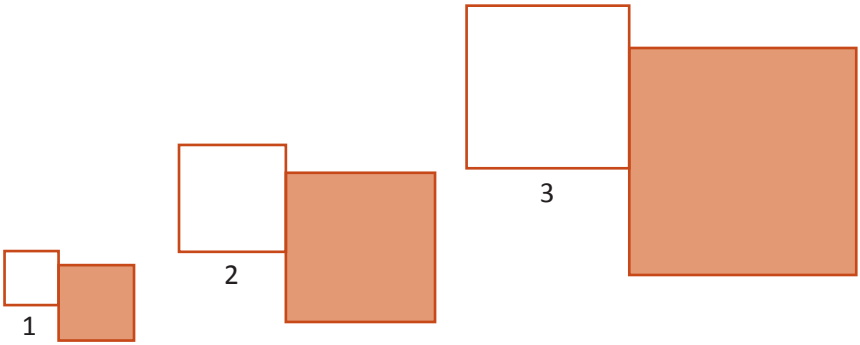
c) **Observe** os termos da segunda diagonal do triângulo harmónico ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, ...).

Existirá alguma relação entre os denominadores destes termos? **Explique** o seu raciocínio. Qual será o denominador do 100.º termo desta diagonal?

d) Usando a calculadora, **reescreva** o triângulo utilizando a representação decimal de cada um dos números racionais. Que tipo de dízimas aparecem no novo triângulo?

e) Existe alguma relação entre o tipo de dízimas geradas e os denominadores das frações? **Investigue e explique** o seu raciocínio.

19. Em cada uma das 3 figuras representadas, o lado do quadrado cinzento tem o comprimento da diagonal do quadrado branco. O lado do quadrado branco da figura 1 mede 1 e a medida do lado dos quadrado branco aumenta 1 unidade entre a figura 1 e a figura 2 e entre a figura 2 e a figura 3.



a) Calcule a área de cada um dos quadrados da figura 3.

b) Indique o valor lógico das seguintes afirmações. **Justifique**.

- A medida do lado do quadrado cinzento da figura 2 é um número irracional.

- A soma das áreas dos dois quadrados da figura 3 é um número irracional.

CAPÍTULO 3

OPERAÇÕES NOS PRIMEIROS ANOS

Neste capítulo pretendem-se apresentar e discutir aspetos centrais relativos ao estudo das operações elementares, com números naturais, numa perspetiva relevante para os professores dos primeiros anos. Neste sentido, assume-se claramente que o conceito de **sentido de número** é central e um importante ponto de partida para o que se vai apresentar e discutir.

Foi fundamentalmente no início da década de 90 do século passado que se começou a perspetivar o ensino e a aprendizagem dos números e das operações numa perspetiva pedagógica de desenvolvimento do sentido de número. O sentido de número refere-se à compreensão geral dos números e operações e à destreza e predisposição para usar essa compreensão de modo flexível. Ter sentido de número reflete assim uma tendência e habilidade para usar os números e o cálculo de modo flexível, ponderando as técnicas a utilizar em função da sua adequação à situação e contexto, assumindo particular importância a estimativa e o uso de estratégias de cálculo mental, assentes no uso de propriedades e relações numéricas. Adotamos aqui a perspetiva de Buys (2001) relativa ao cálculo mental, que aponta três caraterísticas para este tipo de cálculo: i) opera-se sobre os números e não sobre os dígitos; ii) usam-se as propriedades das operações e relações numéricas; e iii) embora se calcule mentalmente, é possível fazer registos.

Do ponto de vista didático, trabalhar numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número implica a conceção de experiências de aprendizagem em que as crianças desenvolvem e utilizam uma grande variedade de estratégias e de procedimentos de adição, subtração, multiplicação e divisão usando a sua compreensão dos números. Progressivamente vão transformando estas estratégias e procedimentos em diferentes níveis de abstração e de aplicação flexível. Entre outros, este desenvolvimento progressivo caminha a par da aquisição:

(a) de uma certa compreensão dos números, associada à organização da sequência numérica e ao desenvolvimento da noção do sistema decimal;

(b) de competências específicas tais como a contagem sistemática de em de, a partir de um número qualquer, progressiva e regressivamente;

(c) da decomposição dos números em partes diferentes ou iguais (60 = 30 + 30 = 38 + 22), decomposição em fatores (60 = 2 x 30 = 4 x 15) ou usando propriedades (60 = 5 x 10 + 5 x 2);

(c) da compreensão de relações numéricas simples, tais como: 6 + 7 = 13, porque 6 + 6 = 12 ou 9 + 7 = 10 + 6 = 16;

(d) da capacidade de raciocinar a partir de relações e generalizar, por exemplo pensar que se 3 x 2 = 6 então 30 x 2 = 60; ou se 3 + 2 = 5 então 30 + 20 = 50.

No desenvolvimento do sentido de número e no que às operações diz respeito, é importante conhecer os sentidos das operações, as propriedades e relações numéricas que podem ser desenvolvidas e que apoiam o cálculo mental e escrito dos alunos e os algoritmos mais ou menos formais que os alunos podem utilizar. Nas secções seguinte, procuram-se apresentar e discutir aspetos relevantes de cada uma destas dimensões para cada uma das operações elementares.

3.1. Adição e subtração

3.1.1. Sentidos da adição e da subtração

As situações, em contexto, que envolvem adição podem ter dois sentidos, o sentido de **juntar** (ou combinar), presente, por exemplo, no problema: "Uma fruteira tem 6 laranjas e 8 maçãs. Quantos frutos tem a fruteira no total?; e o sentido de **acrescentar**, presente, por exemplo, no problema: "A Francisca está a colecionar cromos do mundial. Já tinha 23 e a mãe hoje trouxe-lhe mais 12. Com quantos cromos ficou a Francisca?.

As situações, em contexto, que envolvem subtração podem ter três sentidos, o sentido de **retirar**, presente, por exemplo, no problema: "O Miguel recebeu uma caixa com 24 bombons e comeu 7. Quantos bombons ficaram na caixa?"; o sentido de **completar**, presente, por exemplo, no problema: "O Pedro quer comprar uma camisola que custa 50€. Já poupou 32€. Quanto dinheiro que falta para poder fazer a compra?"; e o sentido de **comparar**, presente, por exemplo, no problema: "A Maria tem 12 canetas e o Filipe tem 18 canetas. Quantas canetas tem a mais o Filipe?.

A importância de explorar situações que envolvam os diferentes sentidos reside no facto de a cada sentido estar associada uma operação

mental específica. Repare-se que, enquanto no exemplo de retirar apresentado acima, uma criança tenderá a subtrair 7 a 24 (24-7=?), na situação de completar, uma criança procurará o valor que terá de adicionar a 32 para chegar a 50 (32+?=50). Isto significa que, apesar de todos os problemas enunciados no parágrafo anterior serem de subtração, apontarão estratégias de raciocínio que podem não ser exclusivamente subtrativas.

O quadro 6 sistematiza os sentidos da adição e da subtração, ilustrando-os com novos exemplos.

Operação	**Sentido**	**Descrição**	**Exemplo**
Adição	Juntar/ combinar	Situações em que duas ou mais quantidades são agrupadas numa única quantidade.	*O João tem 17 berlindes, o Pedro tem 11. Quantos berlindes têm os dois juntos?*
	Acrescentar	Situações em que uma quantidade é aumentada determinado número.	*O João tinha 17 berlindes mas deram-lhe mais 11. Quantos berlindes tem agora?*
Subtração	Retirar	Situações em que uma quantidade é diminuída.	*O João tinha 17 berlindes e deu 11 ao irmão. Com quantos ficou?*
	Completar	Situações em que se pretende encontrar quanto falta a uma quantidade para igualar outra.	*Quantas bolas tenho de colocar numa caixa para perfazer 17 bolas se esta já contiver 11 bolas?*
	Comparar	Situações em que duas quantidades são comparadas e pretende-se determinar a diferença entre elas.	*Quantos cubos tem a mais uma torre de 17 cubos em relação a uma torre com 11 cubos?*

Quadro 6 – Sentidos da adição e da subtração.

3.1.2. Cálculo mental e escrito na adição e subtração

Numa fase inicial, as crianças podem adicionar e subtrair em diferentes situações usando a **contagem**, usualmente apoiando-se na manipulação de objetos (que podem ser contas, cubos ou os dedos das mãos). O uso da contagem é visível quando uma criança para calcular 7+5=?, conta a partir do 7: 8, 9, 10, 11, 12 e responde 12. O mesmo acontece em situações de subtração, em qualquer dos sentidos. Por exemplo, para calcular quanto falta a 12 para ter 16, contam a partir do 12: 13, 14, 15, 16 e verificam que são 4; ou para calcular 16-5=?, pensam regressivamente a partir do 16: 15, 14, 13, 12, 11 e respondem 11.

Posteriormente, as crianças evoluem nas suas formas de calcular quando começam a usar **factos numéricos básicos** para raciocinar em termos aditivos ou subtrativos e vão abandonando progressivamente a contagem. Alguns exemplos de factos numéricos básicos são o conhecimento dos "**números amigos do 10**", isto é, as decomposições em duas parcelas que são iguais a 10 (0+10=10; 1+9=10; 2+8=10; 3+7=10; 4+6=10; 5+5=10), ao qual se associa o conhecimento intuitivo da **comutatividade da adição** (4+6=6+4=10); e o reconhecimento de **dobros** de números pequenos (1+1=2; 2+2=4; 3+3=6; 4+4=8; 5+5=10; 6+6=12; ...), que se amplia depois para o reconhecimento de **quase dobros** (6+7=13 porque 6+6=12). Fosnot e Dolk (2001) identificam um conjunto de estratégias usadas pelos alunos, com números até 20, e que são fundamentais para adicionar e subtrair:

- ***dobros e quase dobros*** – por exemplo, 7+8=7+7+1=15 ou 7+8=8+8-1=15;

- ***usar o 5 como número de referência***, por exemplo, 6+7=5+1+5+2=10+3=13;

- ***fazer até ao 10***, por exemplo, 9+6 via 9+1=10; 10+5=15;

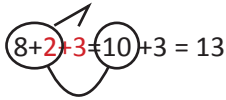
- ***utilizar a compensação***, por exemplo, 6+8=7+7=14;

- ***utilizar factos matemáticos já conhecidos***, por exemplo, 6+8=15, então 7+8=15+1=16.

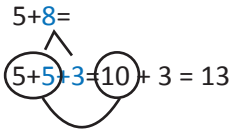
Numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, o conhecimento de factos numéricos e o uso das estratégias identificadas acima facilitam e suportam o desenvolvimento de estratégias progressivamente mais sofisticadas de cálculo mental e escrito. Contudo, é importante salientar que este desenvolvimento acontece de forma diferenciada e individualizada em cada criança e varia em função das experiências de aprendizagem que tiverem oportunidade de vivenciar.

Vejamos uma situação que ilustra precisamente essa diversidade. Um professor pergunta a duas crianças quanto é 5+8? A Maria responde: "É mais fácil pensar em 8+5. Fiz 8+2=10 e 10+3=13". O Pedro diz: "Eu pensei de forma diferente. Fiz 5+5+3; 5+5=10 e 10+3=13". Os raciocínios apresentados pelas crianças, ilustram estratégias facilitadoras do cálculo mental. Para calcular 5+8, Maria sugere que se comutem as parcelas, adicionado a menor à maior e não o inverso. De facto, variadas vezes, quando a criança ainda conta para adicionar, é mais simples adicionar o menor número ao maior. Por exemplo para adicionar 2+9, é mais simples juntar 2 a 9, do que juntar 9 a 2. Além disso ambas as crianças procuram números de referência (o 5 e o 10) para facilitar os cálculos que associam também facilmente aos dedos de uma e duas mãos respetivamente:

- A Ana para fazer 8+5, decompõe o 5 em 2+3, para conseguir obter 10. A partir daí tudo é mais fácil: 8+5=



- O João para fazer 5 +8, decompõe o 8 em 5+3, para conseguir obter 10:



A **capacidade de estimar** é uma das componentes do sentido de número. Quando bem desenvolvida, reforça os saberes acerca do sistema de numeração decimal e dos efeitos das operações aritméticas sobre os números. Tradicionalmente a escola tende a valorizar a capacidade de calcular de forma exata. Essa aprendizagem é de facto fundamental, contudo, até desse ponto de vista, um aluno que seja capaz de estimar antes de calcular, consegue avaliar se o resultado que obteve é razoável ou não. É fundamental que as crianças sejam capazes de realizar estimativas e avaliar a razoabilidade dos resultados. De facto, esta capacidade deve ser desenvolvida desde muito cedo. Ao mesmo tempo que as crianças aprendem a calcular, devem ser estimuladas a realizar estimativas e saber dizer aproximadamente qual vai ser o resultado. No início da escolaridade a noção de estimar ou obter um valor aproximado deve organizar-se em função dos números de referência, particularmente do 10 e dos seus múltiplos. Isto significa, por exemplo, que as crianças devem ser capazes de dizer sem calcular se a soma de dois números de um algarismo é maior ou menor do que 10. À medida que vai

trabalhando com números maiores deve ser capaz de estimar se uma determinada soma é, por exemplo, maior ou menor que 50 ou 100.

Sempre que pedimos a uma criança para adicionar (ou subtrair) podemos questioná-las previamente em relação à proximidade da soma (ou diferença) que se pretende obter, com os números de referência (10, 20, 50, 100):

8+4 *"A soma vai ser maior ou menor que 10? Porquê?"*

25+22 *"A soma vai ser maior ou menor que 50? Porquê?"*

19 +6 *"A soma está mais próxima de 10 ou de 30? Porquê?"*

31 – 12 *"A diferença vai ser aproximadamente quanto? Porquê?"*

Retomando a nossa análise relativamente ao cálculo mental, à medida que as crianças vão contactando com números maiores, as estratégias usadas podem e devem também ser alargadas. A investigação realizada nas últimas décadas, em Educação Matemática, procurou sistematizar o tipo de estratégias que as crianças usam para adicionar e subtrair num contexto de desenvolvimento do sentido de número, com números maiores que 20. O quadro 7 sistematiza essas estratégias.

Estratégia geral	**Codificação**	**Exemplo na adição 47 + 28**	**Exemplo na subtração 54 - 26**
Saltos	Saltos de 10 em 10 (N10)	47+20=67; 67+8=75	54-20=34; 34-6=28
	Saltos de 10 em 10, com compensação (N10C)	47+30=77; 77-2=75	54-30=24; 24+4=28
	Aproximação à dezena mais próxima (A10)	47+3=50; 50+25=75	54-4=50; 50-22=28
Decomposição	Decomposição com recomposição (1010)	40+20=60; 7+8=15; 60+15=75	40-20=20; 14-6=8; 20+8=28
	Método misto (10s)	40+20=60; 60+7=67; 67+8=75	50-20=30; 30+4=34; 34-6=28

Quadro 7 - Classificação das estratégias de adição e subtração (adaptado de Foxman e Beishuizen, 2002).

É importante salientar, contudo, que as estratégias apresentadas acima podem variar, sobretudo na subtração, se o cálculo surgir como necessidade de responder a um problema colocado em contexto em que o sentido não é retirar. Por exemplo, no uso de estratégias de saltos, se o sentido do problema for comparar ou completar, os alunos tendem a partir do subtrativo para chegar ao aditivo, fazendo: 26+20=46; 46+8=54; 20+8=**28** (N10) ou 26+30=56; 56-2=54; 30-2=**28** (N10C) ou 26+4=30; 30+24=54; 4+24=**28** (A10). Na subtração as estratégias de decomposição são propícias a erros. Repare-se que, no exemplo acima, a decomposição ordem a ordem simples (50-20; 4-6) é problemática uma vez que os alunos tendem a não reconhecer que 4-6 é diferente de 6-4 e respondem que a diferença é 32 e não 28. O uso correto da estratégia implica a decomposição mais complexa, ilustrada acima, e que não é facilmente compreendida pelos alunos.

O uso de modelos que auxiliem a criança a estruturar o seu modo de pensar são fundamentais para estimular o uso de estratégias de cálculo mental e escrito. Há vários modelos relevantes, mas colocaríamos dois em evidência, o **quadrado do 100** e a **reta numérica** não graduada. O quadrado do 100 não é mais do que um quadrado 10x10 em que as quadrículas estão numeradas de 1 a 100 (figura 21).

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

Figura 21 – Quadrado do 100

Este material pode ser usado pelas crianças para adicionar ou subtrair, quando os números envolvidos são menores ou iguais a 100, fazendo contagens progressivas ou regressivas de 1 em 1 ou fazendo saltos maiores, partindo do reconhecimento das regularidades que existem no quadrado do 100, principalmente a variação de uma unidade que se verifica entre colunas consecutivas e a variação de uma dezena que se verifica entre linhas consecutivas.

Vejamos o uso que pode ser feito do quadrado do 100, para calcular 47+28=? (figura 22 –exemplo A), a criança pode marcar o número 47 no quadrado, pintando-o ou colocando sobre ele uma peça e de seguida adicionar 20 e depois 8, o que corresponde a descer verticalmente 2 linhas, chegando ao número 67 e depois juntar 8 unidades, o que pode ser feito, por exemplo, usando a compensação (10-2), o que corresponde a descer uma linha e recuar duas unidades (N10C). Uma outra possibilidade (figura 22- exemplo B) seria a criança aproximar à dezena mais próxima (A10), juntando 3 unidades ao 47, o que corresponde a fazer um deslocamento para a direita, obtendo 50 e despois acrescentar 25.

Exemplo A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

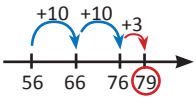
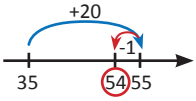
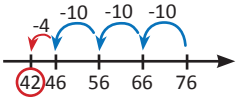
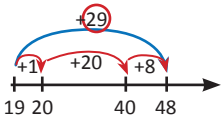
Exemplo B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 22 – Exemplos de cálculo de 47+28=? com o apoio do quadrado do 100.

É importante salientar que as situações apresentadas acima são apenas exemplos, já que há um número maior de estratégias que podem ser utilizadas. A flexibilidade é uma caraterística do cálculo mental, que deve estar presente no uso deste modelo de apoio à estruturação do pensamento da criança.

A reta numérica não graduada é outro modelo de apoio que pode auxiliar o desenvolvimento do cálculo mental das crianças e facilitar a utilização da estratégia dos saltos, quer na adição, quer na subtração. Adicionalmente, estimula o estabelecimento de relações de ordem entre os números, já que para usar a reta é necessário posicionar adequadamente os números à medida que vão sendo usados na resolução da operação. Ilustraremos de seguida, no quadro 8, algumas situações de uso da reta numérica a partir de situações problemáticas, identificando as estratégias utilizadas.

Problema	Exemplo de resolução	Estratégia
Um museu recebeu a visita de 56 alunos durante a manhã e de 23 durante a tarde. Quantos alunos visitaram o museu nesse dia?		A criança marca o número 56 na reta e faz saltos de 10 (**N10**).
Numa piscina, há 35 bolas e 19 arcos. Quantos objetos existem ao todo?”		A criança marca o número 35, faz saltos de 10 e compensa, recuando uma unidade (**N10C**).
No início da semana existiam na escola do David 76 pacotes de leite. Na segunda-feira gastaram-se 34. Quantos pacotes de leite ainda há?		A criança marca o número 76 faz saltos de 10 (**N10**).
Na peixaria, a mãe da Mariana tirou a senha 48 e estava a ser atendida a pessoa com a senha 19. Quantas pessoas tem a mãe da Mariana à sua frente?		A criança marca o número 19 e aproxima à dezena mais próxima que é 20 (**A10**), saltando depois até chegar ao 48.

Quadro 8 – Exemplos de uso de estratégias dos saltos com apoio da reta numérica.

Nos exemplos acima, a escolha dos números envolvidos não foi neutra. Repare-se que as estratégias utilizadas, ainda que pudessem ter sido outras, se ajustaram bem aos números envolvidos. A existência de um valor pequeno nas unidades estimula o uso da estratégia N10, enquanto

a existência do nove nas unidades estimula o uso da estratégia N10C ou da estratégia A10.

É importante voltar a salientar que também os sentidos dos problemas enunciados não são neutros no impacto que podem ter nas estratégias utilizadas. Quando o contexto está presente numa situação de cálculo, esse mesmo contexto, pelo sentido operatório que inclui, induz determinado tipo de estratégias em detrimento de outras. Repare-se no caso no problema dos pacotes de leite, neste caso, como o sentido do problema é o de retirar, a criança vai tender a assinalar o aditivo e ir retirando sucessivamente quantidades a esse número (saltando da direita para a esquerda); já no problema da peixaria, em que o sentido é comparar, a criança vai tender a assinalar o subtrativo e ir adicionando sucessivamente quantidades a esse número para chegar ao aditivo (saltando da esquerda para a direita). Adicionalmente, enquanto que, na primeira situação, a diferença é um número assinalado na reta, já na segunda situação, a diferença é a soma dos valores dos saltos.

Na aprendizagem da adição a da subtração devem ser proporcionadas às crianças experiências de aprendizagem que privilegiem de forma intencional o desenvolvimento e o uso de estratégias diversificadas de cálculo mental e escrito. No âmbito destas experiências, o recurso a tarefas de resolução de problemas é fundamental, pois, como vimos, o contexto não só dá sentido ao trabalho matemático que está a ser desenvolvido, mas também estimula o uso de estratégias específicas e úteis para o cálculo de somas e diferenças.

Estes processos precisam de tempo, porque o desenvolvimento do sentido de número, onde se incluem as capacidades de cálculo, não acontecem nem ao mesmo tempo, nem da mesma forma, em todas as crianças. Alguns vão precisar de usar modelos de apoio para estruturar as suas formas de pensar, outros vão querer abandoná-los, porque sentem que já não precisam deles. Esse é o caminho, mas cada criança precisa de percorrê-lo ao seu ritmo. Nesta difícil dinâmica pedagógica, quando se pensa na sala de aula, ganham uma importância decisiva as discussões matemáticas, por um lado, porque quando a criança verbaliza a forma como pensou para resolver um dado problema é impelida a refletir sobre o que fez, o que conduz a um aprofundamento e maior consciencialização acerca da forma como pensou; por outro, porque quando escuta, por exemplo, a explicação de um colega é levado a confrontá-la com a sua, aprendendo outras formas de ver matematicamente, dando-lhes muitas vezes significado e apropriando-se delas na sua prática matemá-

tica. Mas acima de tudo, uma discussão matemática convida os alunos a colocarem-se numa perspetiva analítica e crítica sobre o que se faz na aula de matemática, desenvolvendo competências transversais fundamentais para a vida.

3.1.3. Algoritmos para a adição e subtração

Em determinadas situações de cálculo, principalmente com números grandes, é útil conhecer algoritmos que permitam calcular somas e diferenças. Adotamos aqui o entendimento de que um algoritmo é uma disposição vertical de cálculo que permite calcular o resultado de uma operação pela aplicação de um procedimento sequencial.

Um dos algoritmos que nos parece relevante para a adição é o **algoritmo das adições parciais**, que tem a particularidade de facilitar a transposição de estratégias horizontais de cálculo, baseadas na decomposição, para uma disposição vertical. Se a criança, para adicionar 45 a 267, decompõe os números por ordens (267+45=200+60+7+40+5=200+100+12 =312), compreenderá facilmente este algoritmo. A figura 23 apresenta dois exemplos que descreveremos de seguida.

$$\begin{array}{r} 267 \\ +\,45 \\ \hline 12 \\ 100 \\ +\,200 \\ \hline 312 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 685 \\ +\,133 \\ \hline 8 \\ 110 \\ 700 \\ \hline 818 \end{array}$$

Figura 23 – Exemplos de uso do algoritmo das adições parciais.

Para adicionar 267 com 45 adicionam-se os valores, ordem a ordem. Nas unidades temos 7+5=12, regista-se 12 (repare-se que verticalmente, ao registar 12, temos 12 unidades, na forma de 1 dezena e 2 unidades); nas dezenas temos 6+4=10, regista-se 100 (10 dezenas são 100 unidades); nas centenas temos 2, regista-se 200 (2 centenas são 200 unidades). Finalmente, adicionam-se as somas parciais para obter a soma total. O procedimento foi igual para o segundo exemplo em que se adicionou 133 a 685.

Nas unidades temos 5+3=8, regista-se 8; nas dezenas temos 8+3=11, regista-se 110; nas centenas temos 6+1=7, regista-se 700. Finalmente, adicionam-se as somas parciais para obter a soma total. Optámos por descrever o algoritmo começando a adicionar da menor ordem para a maior ordem, mas poderíamos tê-lo feito da maior ordem para a menor. Discutir com as crianças essa possibilidade é aliás uma oportunidade de reforçar a sua compreensão acerca da natureza posicional do sistema de numeração.

Um outro algoritmo para a adição é o comummente designado como **algoritmo tradicional da adição**. Na realidade este algoritmo não é mais que uma versão sintética do algoritmo das adições parciais e que implica a formalização do transporte (ou reagrupamento) quando necessário para resolver a operação. A figura 24 apresenta dois exemplos, um em que não há transporte e outra em que há transporte. Para adicionar 243 com 135, adicionam-se os valores ordem a ordem, começando na direita para a esquerda. Nas unidades temos 3+5=8, regista-se 8; nas dezenas temos 4+3=7, regista-se 7; nas centenas temos 2+1=3, regista-se 3. Obtemos a soma 378. Nesta situação como a soma dos dígitos de cada ordem é menos do que 10, nunca há necessidade de transporte (ou reagrupamento), dizemos que é um exemplo de adição sem transporte. Já na adição de 267 com 184, usando este procedimento, temos, nas unidades 7+4=11. Contudo, a quantidade 11 ultrapassa a capacidade de primeira ordem que só comporta quantidades entre 0 e 9, isto porque obter 11 corresponde a ter uma dezena e uma unidade. Então, registo 1 nas unidades e transporto a dezena para a segunda ordem (coloca-se 1 na coluna onde já está o 6 e o 8). Na segunda ordem, adiciono todas as dezenas, temos 1+6+8=15, registo 5 e transporto a centena para a terceira ordem (coloca-se 1 na coluna onde já está o 2 e o 1), pelo mesmo motivo. Obtemos a soma 451.

$$\begin{array}{r} 243 \\ +\ 135 \\ \hline 378 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 267 \\ +\ 184 \\ \hline 451 \end{array}$$

Figura 24 – Exemplos de uso do algoritmo tradicional da adição (sem e com transporte).

Gostaríamos ainda de referir um outro algoritmo com relevância histórica e bastante usado na Europa, durante a idade média, à medida que se generalizava o uso do sistema de numeração indo-árabe em detrimento

do sistema de numeração romano. Estamos a falar do **algoritmo da gelosia**. Este algoritmo usa janelas ou quadrados onde os dígitos das somas parciais são registados. A figura 25 apresenta 3 exemplos de uso deste algoritmo. O algoritmo pode ser descrito da seguinte forma: em primeiro lugar, registam-se as parcelas verticalmente; depois, desenham-se quadrados justapostos, debaixo da última parcela (tantos quantas as ordens envolvidas); de seguida, dividem-se esses quadrados por uma diagonal como se ilustra na figura 25; depois, regista-se em cada quadrado a soma, ordem a ordem, escrevendo abaixo da diagonal o algarismo das unidades e acima da diagonal o das dezenas; finalmente, adicionam-se os valores das diagonais (representadas da mesma cor, nos exemplos).

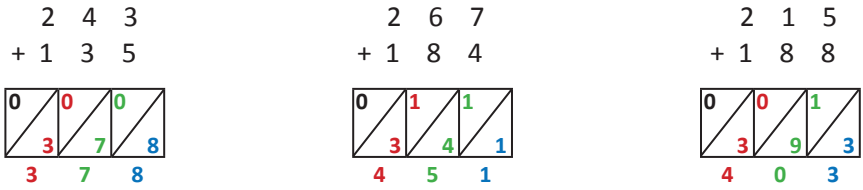


Figura 25 – Exemplos do uso do algoritmo da gelosia.

Repare-se que neste algoritmo a diferença entre adições com e sem transporte não é significativa à exceção de quando se obtém, na mesma diagonal, os dígitos 1 e 9 (como no terceiro exemplo da figura). Nesta situação há transporte de um agrupamento para a ordem imediatamente superior.

TAREFA 15

1. Numa turma, diferentes crianças calcularam 17 + 39 de modos diferentes, usando a reta numérica. Os seus raciocínios podem ser traduzidos da seguinte forma:

A Ana pensou: 17 + 39 = (17 + 3) + 36 = 20 + 36 = 56

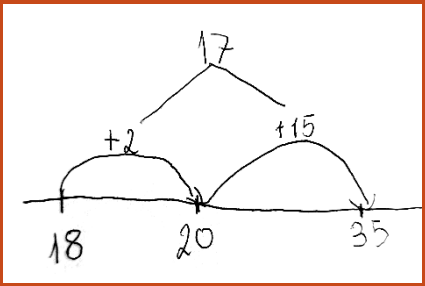
A Paula pensou: 17 + 39 = (17 + 10 + 10 + 10) + 9 = 47 + 9 = 47 + 10 – 1 = 57 – 1 = 56

O João pensou: 17 + 39 = 17 + 40 -1 = 57 – 1 = 56

1.1. Reproduza na reta cada uma das estratégias.

1.2. Identifique as estratégias usadas por cada criança.

2. Considere o seguinte problema: "A Joana está a ler um livro com 35 páginas. Já leu 18 páginas. Quantas lhe faltam ler?". Observe a forma como uma criança resolveu o problema.



2.1. Identifique o sentido do problema.

2.2. Identifique a estratégia utilizada pela criança.

2.3. Indique os outros sentidos da subtração e **exemplifique** cada um deles com um problema.

3.2. Multiplicação

3.2.1 Sentidos da multiplicação

Relativamente à multiplicação existem três sentidos muito relevantes para o estudo da operação: o **sentido aditivo**, o **sentido proporcional** e o **sentido combinatório**.

O **sentido aditivo**, associado comummente à repetição de **conjuntos equipotentes** (conjuntos com o mesmo cardinal) está presente, por exemplo, no problema: "A Joana tem 3 sacos, cada um com 4 rebuçados. Quantos rebuçados tem a Joana?". Situações que envolvam este sentido, apresentam uma conexão muito forte com conhecimentos anteriores das crianças, uma vez que estimulam o uso da adição repetida, sendo por isso facilmente compreendidos pelos alunos. No exemplo anterior, a criança pode resolver o problema, sem multiplicar, dizendo, por exemplo, que a Joana tem 12 rebuçados pensando em 4+4+4=12. Este contexto proporciona também o reconhecimento que 4+4+4=3x4=12.

No âmbito da análise de situações e contextos onde está presente o sentido aditivo, adquirem particular relevância as situações de **disposição retangular**, porque estimulam a emergência de procedimentos multiplicativos, incluindo a ideia de produto. Vejamos um exemplo, a partir de disposições retangulares de frutas em caixas (figura 26).

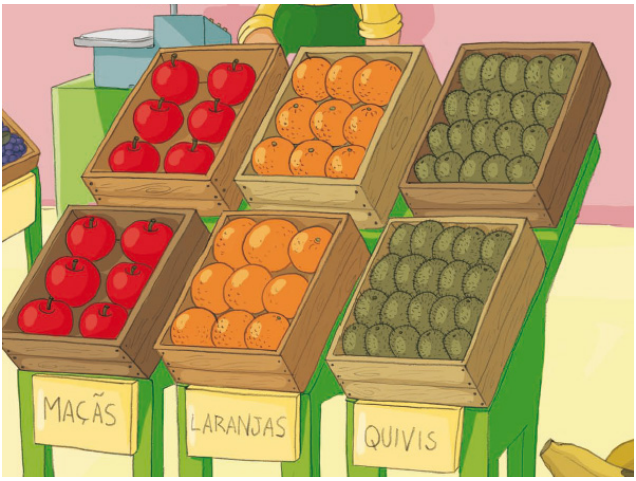


Figura 26 – Exemplos de frutas em disposição retangular (Tavares, Gonçalves, Menino & Cadima, 2011).

Ao pedirmos às crianças que digam quantos frutos há numa caixa, estimulamos que relacionem a adição com a multiplicação. Por exemplo, numa caixa de maçãs da figura 26, tomando como referência as colunas, podemos dizer que há 3+3=2x3=6 maçãs; olhando para as linhas, podemos dizer que há 2+2+2=3x2=6 maçãs. É também evidente que emerge intuitivamente a propriedade comutativa da multiplicação (3x2=2x3). Estes aspetos são ampliados e consolidados ao serem analisadas caixas com maior número de frutos.

Se pedirmos aos alunos que calculem quantos frutos há nas duas caixas de maçãs da figura 26, estamos já a estimular o uso do sentido proporcional da multiplicação, uma vez que alguns alunos podem raciocinar usando a noção de dobro afirmando que se numa caixa de maçãs há 6 maçãs, em duas há 6+6=2x6 (dobro), que são 12. Adicionalmente, nesta situação, as crianças podem continuar a olhar para os alinhamentos dos frutos nas duas caixas, dispostas uma por cima da outra, visualizando o total de frutos de diferentes formas:

- 3+3+3+3 = 4x3 = 12 (quando veem 4 colunas de 3 maçãs);

- 2+2+2+2+2+2 = 6x2 = 12 (quando veem 6 linhas de 2 maçãs);

- 6+6 = 2x6 = 12 (quando veem 2 colunas de 6 maçãs).

Se as duas caixas de maçãs estivessem lado a lado horizontalmente, as possibilidades de contagem seriam outras já que, olhando para os alinhamentos em coluna e linha das duas caixas em conjunto, poderiam contar 4+4+4=3x4=12 (nas linhas) e 3+3+3+3=4x3=12 (nas colunas).

Todas estas explorações, fortemente alicerçadas no contexto, permitem que as crianças explorem diferentes relações entre expressões numéricas equivalentes, envolvendo a multiplicação. Inclusivamente, verificamos que tarefas desta natureza apresentam a possibilidade de estabelecimento de conexões entre os números e a álgebra, ao proporcionarem discussões e reflexões acerca das igualdades aritméticas, envolvendo a multiplicação.

O **sentido proporcional** está presente, por exemplo, no problema: “Um bolo leva 4 ovos. Quantos ovos serão necessários para fazer 2 bolos? E 4 bolos? E 8 bolos?”. Este sentido estimula claramente um pensamento proporcional e faz uso intuitivo da propriedade distributiva da mul-

tiplicação em relação à adição, neste caso particular usando os dobros: se 1 bolo leva 4 ovos, dois bolos levam o dobro (2x4), ou seja 8 ovos (1x4+1x4=8); 4 bolos (4x4) levam 16 ovos (2x4+2x4=2x8=16); e 8 bolos (8x4) levam 32 ovos (4x4+4x4=2x16=32). Destacaríamos dois tipos de representação muito úteis neste tipo de contexto, a reta numérica e a tabela. Se a criança usar a reta pode começar por estabelecer a correspondência entre 1 bolo e 4 ovos (um bolo leva quatro ovos) e ir duplicando cada variável, fazendo registos sucessivos na reta. Esta representação visual dá significado e suporta o raciocínio proporcional (figura 27).

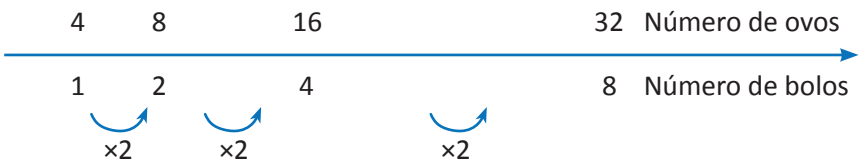


Figura 27 – Uso da reta numérica com sentido proporcional.

A tabela pode ser outra representação útil, de suporte a este tipo de raciocínio (figura 28).

Número de bolos	Quantidade de ovos
1	4
2	8
4	16
8	32

×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2

Figura 28 – Uso da tabela com sentido proporcional.

O **sentido combinatório** está presente, por exemplo, no problema: "A Mariana tem 3 camisolas de cores diferentes e duas saias também de cores diferentes. De quantas formas diferentes se pode vestir, combinando uma camisola com uma saia?".

A multiplicação, enquanto produto cartesiano de conjuntos, só está presente em situações de sentido combinatório. Repare-se que é só nestas situações que o produto é uma quantidade de elementos que resulta da

combinação de elementos de dois conjuntos, isto é, se eu multiplico um conjunto cujos elementos são camisolas por um conjunto cujos elementos são calças, o produto é a quantidade de combinações possíveis de escolher camisolas e calças diferentes, ou seja é o cardinal do conjunto dos pares ordenados que resulta da multiplicação dos 2 conjuntos. No exemplo do problema acima temos 2 tipos de saias e 3 tipos de camisolas, que podemos representar, respetivamente, da seguinte forma:

$$A = \{b,n\} \qquad B = \{m,c,p\}$$

O produto de A por B é representado assim: $A \times B = \{(b,m), (b,c), (b,p), (n,m), (n,c), (n,p)\}$ e cada um dos pares ordenados é uma combinação entre um tipo de saia e um tipo de camisola. Já nas situações de adição repetida ou proporcionalidade, isto não acontece, porque o produto é sempre da natureza da variável, isto é, se eu repito um conjunto de 6 bolas, n vezes, o produto continua a ser uma determinada quantidade de bolas.

Para resolver o problema de combinação de 2 tipos de saias com 3 tipos de camisolas, as crianças podem usar uma representação pictórica desenhando e combinando saias e camisolas, como ilustrado na figura 29.

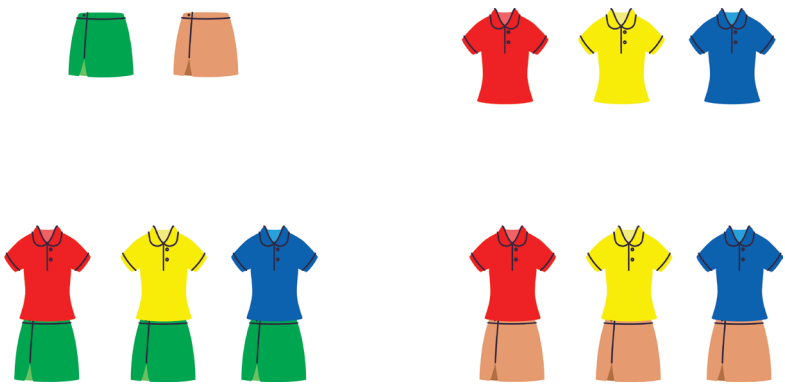


Figura 29 – Combinações de 2 saias de cores diferentes com 3 camisolas de cores diferentes.

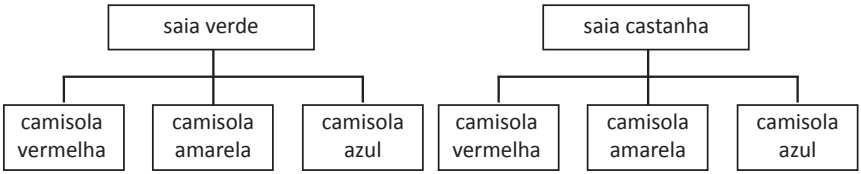
Ainda na resolução deste problema há outras representações que as crianças podem utilizar, de forma muito interessante, antes de generalizarem que se trata de uma situação que pode ser modelada pela expressão 3x2 ou 2x3. É comum utilizarem uma lista ordenada de possibilidades, usando a linguagem natural (figura 30 – A). Adicionalmente, representações envolvendo o uso de uma tabela (figura 30 – B) ou de um diagrama (figura 30 – C) são muito úteis.

- saia verde e camisola vermelha
- saia verde e camisola amarela
- saia verde e camisola azul
- saia castanha e camisola vermelha
- saia castanha e camisola amarela
- saia castanha e camisola azul

A

	saia verde	saia castanha
camisola vermelha	x	x
camisola amarela	x	x
camisola azul	x	x

B



C

Figura 30 – Representações úteis em problemas com sentido combinatório.

O quadro 9 sistematiza os sentidos da multiplicação, ilustrando-os com novos exemplos.

Operação	Sentido	Descrição	Exemplos
Multiplicação	Aditivo	Situações em que se procura uma dada quantidade de que pode resultar da adição repetida de uma constante.	*O Pedro embalou bombons em 5 caixas. Cada caixa tem 6 bombons. Quantos bombons embalou o Pedro?* *Um pequeno auditório tem as cadeiras organizadas em 6 filas e cada fila tem 8 cadeiras. Quantas cadeiras tem o auditório?* *Uma estante tem 3 módulos iguais. A altura de cada módulo é 15 cm. Qual é a altura da estante?*
	Proporcional	Situações em que se procura uma dada quantidade de que é um dos termos de uma proporção.	*Os alunos de uma escola vão fazer uma vista de estudo. Por cada 100 alunos são necessários 2 autocarros. Quantos autocarros são necessários se forem 300 alunos à visita de estudo?* *Um pack de 4 iogurtes custa 1,50€. Quanto custam 24 iogurtes?*
	Combinatório	Situações em que se procura o total de combinações entre os elementos de dois conjuntos.	*Com dois tipos de cones: bolacha e nougat e três sabores: morango, chocolate e pistachio, quantos gelados diferentes de um só sabor é possível fazer?*

Quadro 9 – Sentidos da multiplicação.

3.2.2. Cálculo mental e escrito na multiplicação

Numa fase inicial, os alunos tendem a usar a adição repetida na resolução de problemas de multiplicação. Do ponto de vista da aprendizagem é importante que progridam para o uso de estratégias multiplicativas

que assentem: i) no uso intuitivo das propriedades da multiplicação, em particular a propriedade comutativa e a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição e à subtração, mas também a propriedade associativa; e ii) de relações numéricas multiplicativas, em particular as relações dobro/metade e o uso de produtos de referência com os fatores 2, 5 e 10. Esta progressão irá suportar o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental e escrito de forma inteligente e flexível. Neste processo, a escolha das tarefas é determinante para a conceção de trajetórias de aprendizagem. As tarefas devem estimular a utilização de modelos contextualizados, assentes na resolução de problemas, envolvendo os diferentes sentidos da multiplicação e suportando o desenvolvimento do sentido da multiplicação e de formas adequadas de cálculo mental multiplicativo.

Num momento posterior, deve existir um trabalho muito consistente de construção, de forma compreensiva e partindo de situações contextualizadas, das tabuadas do 2, 5 e 10, onde as crianças vão adquirir as principais referências que irão permitir um trabalho desenvolto e, consequentemente, a assimilação de produtos mais complexos de outras tabuadas. Deverá seguir-se a construção das tabuadas do 3 e do 4 e, posteriormente das tabuadas do 6, do 7, do 8, do 9, do 11 e do 12.

Tradicionalmente, ainda que se parta de um contexto significativo, a construção de cada tabuada faz-se numa lógica aditiva, a partir da contagem do primeiro grupo, que depois se repete sucessivamente uma, duas, três e mais vezes. Por exemplo, para a tabuada do 4, pode-se considerar um carro, que tem 4 rodas. Se perguntarmos quantas rodas tem 1, 2, 3, 4, … carros, as crianças tenderão a adicionar sucessivamente 4. A estratégia tende assim a ser única e pode ser esquematizada da seguinte forma:

1x4=4

2x4=8 (via 4+4)

3x4=12 (via 8+4)

4x4=16 (via 12+4)

…

Esta abordagem não é incorreta. Contudo, reforça, nas crianças, um processo único assente na adição sucessiva. A consequência é que, quando a criança tiver de calcular 9x4, e se não tiver memorizado ainda este produto, tenderá a adicionar o 4, nove vezes, o que é um processo, no mínimo, moroso e que tende a originar erros. Seria mais adequado e rápido pensar, por exemplo, que 9x4 é igual 10x4 – 4, ou seja, 40-4.

Num contexto de desenvolvimento do sentido de número, defendemos outra abordagem assente na utilização das propriedades da multiplicação e de relações numéricas conhecidas. Partindo do mesmo contexto (um carro que tem 4 rodas), podemos começar por perguntar às crianças quantas rodas têm 2, 10 e 5 carros. Repare-se que esta escolha não é neutra na intencionalidade. Para pensar na quantidade de rodas que há em dois carros, as crianças podem pensar em 4+4, que corresponde ao dobro de 4; para pensar na quantidade de rodas que há em 10 carros as crianças podem usar factos conhecidos sobre o sistema de numeração decimal, se um carro tem 4 rodas, 10 carros têm 40 rodas; se 10 carros têm 40 rodas, 5 carros têm metade das rodas, logo têm 20. Depois podemos perguntar quantos rodas há em 9 carros. E em 4, 3, 6, 7, 8, 11 e 12 carros. A ordem em que as questões são colocadas, não sendo rígida, é importante, pois induz o uso de determinadas propriedades e relações. Vejamos a natureza das estratégias que podem ser usadas pelas crianças, no contexto desta abordagem, para o exemplo acima:

1x4=4	(facto conhecido)
2x4=8	(*via* 4+4 que corresponde ao dobro de 4; ou através do dobro de 2x2)
3x4=12	(*via* 2x4 + 4; ou 4x4 – 4; ou através da propriedade comutativa 4x3 que um produto da tabuada do 3 já trabalhada previamente)
4x4=16	(*via* 2x4+2x4, que corresponde ao dobro de 8; ou 5x4 – 4)
5x4=20	(*via* metade de 10x4)
6x4=24	(*via* 5x4 + 4; ou 3x4 + 3x4, que corresponde ao dobro de 12; ou através do dobro de 6x2)
7x4=28	(*via* 5x4 + 2x4)
8x4=32	(*via* 4x4 + 4x4 que corresponde ao dobro de 16; ou 10x4 – 2x4; ou através do dobro de 8x2)

9x4=36 (*via* 10x4 – 4)

10x4=40 (facto conhecido; ou através do dobro de 10x2)

11x4=44 (*via* 10x4 + 4)

12x4=48 (*via* 10x4 + 2x4; ou o dobro de 6x4)

A diversidade de possibilidades aumenta nas tabuadas superiores ao 5, em particular a utilização da inversão da ordem dos fatores (propriedade comutativa), atendendo ao leque de tabuadas já construídas anteriormente.

O desenvolvimento progressivo da compreensão da multiplicação, assente no uso intuitivo das suas propriedades, na compreensão de relações numéricas multiplicativas e na compreensão e posterior memorização das tabuadas permitem que as crianças calculem produtos com flexibilidade e proficiência. No quadro 10 sistematizam-se alguns exemplos que ilustram uma diversidade de estratégias de cálculo mental e escrito para a multiplicação.

Estratégia	**Exemplos**
Uso da propriedade distributiva	7x28 = 7x20 + 7x8 = 140+56 = 196 *ou* 7x28 = 7x30 – 7x2 = 210-14 = 196 *ou* 7x28 = 7x25 + 7x3 = 175+21 = 196
	12x23 = 10x23 + 2x23 = 230+46 = 276
Uso da propriedade comutativa	2x134x5 = 2x5x134 = 10x134 = 1340
Uso da propriedade associativa	27x50x2 = 27x100 = 2700
Uso de factos conhecidos e valor posicional	15x300 = 15x3x100 = 45x100 = 4500
	304x20 = 304x2x10 = 608x10 = 6080
	30x40 = 3x4x100 = 12x100 = 1200
Uso da relação dobro/metade entre os fatores	24x5 = 12x10 = 120
	32x4 = 64x2 = 128
Substituição	5x86 = 10x86 : 2 = 860:2 = 430
	26x50 = 26x100 : 2 = 2600:2 =1300
	44x25 = 44x100 : 2 : 2 = 4400 : 2 : 2 = 2200 : 2 = 1100

Quadro 10 – Principais estratégias de cálculo mental e escrito na multiplicação.

Nas situações exemplificadas no quadro 10 são mobilizados, de forma recorrente, dois tipos de conhecimentos, além das propriedades ou relações identificadas: os produtos das tabuadas da multiplicação e factos básicos relativos à multiplicação. No exemplo 7x28, apresentado no quadro 10, além do conhecimento de vários produtos que envolvem o fator 7 (tabuada do 7), as crianças sabem que 7x20=140 porque 7x2=14; 7x30=210 porque 7x3=21; 7x25=175 porque 4x25=100 e 3x25=75. Adicionalmente, como se pode reparar a partir da análise dos exemplos acima, a adequação das estratégias depende, sobretudo, dos números envolvidos na situação de cálculo.

3.2.3. Algoritmos para a multiplicação

Tal como já vimos para a adição e para a subtração, há situações em que é útil utilizar algoritmos de cálculo para efetuar uma multiplicação. Ressalvamos, contudo, que a introdução de um algoritmo deve ser bem ponderada e suportada por um bom desenvolvimento do sentido de número e, em particular, do cálculo mental. A introdução precoce de algoritmos de cálculo vai limitar a predisposição para a utilização de estratégias flexíveis que, quotidianamente, são bem mais úteis do que qualquer algoritmo de cálculo. Adicionalmente, do ponto de vista pedagógico, a criança compreenderá melhor e terá mais facilidade na utilização de um algoritmo se tiver um bom cálculo mental.

Uma abordagem ao **algoritmo tradicional** da multiplicação pode assentar na utilização de um **modelo retangular** que estimule a decomposição dos fatores nas suas diferentes ordens, evidenciando as quantidades que estão a ser operadas e estabelecendo uma conexão com o conceito de área. Vejamos o exemplo da multiplicação de 14 por 12. Podemos desenhar em papel quadriculado um retângulo de dimensões 14 por 12, decompondo o comprimento de cada lado numa lógica decimal (14=10+4 e 12=10+2) (figura 31). Repare-se que fazemos esta decomposição para evidenciar o número de quadrados que existem em cada um dos 4 retângulos (verde, amarelo, azul e vermelho) que resultam da decomposição do retângulo original e que são os produtos parciais que se obtêm quando multiplicamos dígito a dígito os fatores 14 e 12.

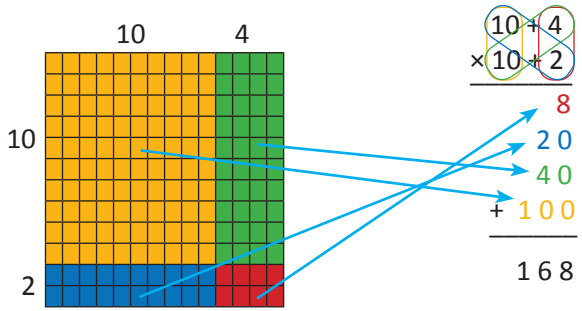


Figura 31 – Ilustração da abordagem ao algoritmo tradicional da multiplicação com base no modelo retangular.

Na imagem, fizemos corresponder a cor de cada um dos retângulos ao registo dos produtos parciais no esquema vertical do algoritmo à direita. Esta disposição evidencia, de forma clara, o resultado desses produtos parciais, estabelecendo as conexões com o modelo retangular à esquerda. A área do retângulo pintado de vermelho corresponde a 4x2=8; a área do retângulo pintado de azul corresponde a 2x10=20; a área do retângulo pintado de verde corresponde a 10x4=40; e a área do retângulo pintado de laranja corresponde a 10x10=100.

Estas conexões reforçam a compreensão do raciocínio envolvido e permitem suportar a compreensão dos passos necessários para a utilização do algoritmo tradicional na sua forma mais sintética. De facto, a partir da exploração de exemplos diversificados, com base no modelo retangular, as crianças percebem com facilidade que, na multiplicação dígito a dígito, não necessitam de registar os produtos parciais, podendo reduzir o algoritmo. No exemplo acima corresponderia a registar na primeira linha o resultado de 2x14 que é 28 (2x4=8, registam 8 unidades; 2x1=2, registam 2 dezenas) e a registar na segunda linha o resultado de 10x14 que é 140 (1x4=4, registam 4 dezenas; 1x1=1, registam 1 centena). Nesta situação não há necessidade de transporte e permite fazer facilmente esta redução em termos de representação.

Numa fase posterior é necessário confrontar os alunos com situações em que há transporte. Vejamos o exemplo de 49x12. Fazendo o registo dos quatro produtos parciais não há diferenças de maior, relativamente ao exemplo anterior. Contudo, na forma mais sintética do algoritmo é necessário perceber que em cada ordem teremos quantidades que po-

dem resultar de um ou mais produtos parciais. Vejamos este exemplo, passo a passo. Ao multiplicar 2 por 9, obtemos 18 (18 unidades), registamos **8** unidades e sobra uma dezena; de seguida, multiplicamos 2 por 4, obtemos 8 (8 dezenas), às quais temos de adicionar 1 dezena que tinha sobrado e registamos **9**. Ficamos com 98 na primeira linha que é o produto de 2 por 49. Finalmente, multiplicamos 1 por 9 que é igual a 9 (9 dezenas) e registamos **90**; de seguida, multiplicamos 1 por 4, que é 4 (4 centenas) e registamos **4**. Ficamos com 490 na segunda linha que é o produto de 10 por 49. Para determinar o produto de 49 por 12 basta adicionar 98 com 490. A figura 32 ilustra graficamente estes passos.

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times\ 12 \\ \hline 98 \\ 490 \\ \hline 588 \end{array}$$

Figura 32 – Exemplo de algoritmo tradicional da multiplicação

Do ponto de vista histórico, parece-nos importante referir dois outros algoritmos para a multiplicação que têm interesse pedagógico, no contexto dos primeiros anos. Um desses algoritmos é o **algoritmo da multiplicação egípcio**. Este algoritmo funciona uma vez que sabemos que qualquer número natural pode ser expresso, de forma única, através de uma soma de potências de 2; de facto, isto corresponde à representação desse número natural na base 2. O algoritmo utilizado pelos egípcios pode ser descrito da seguinte forma: suponhamos que queremos obter o produto de *a* por *b*, então:

1.º escrevemos *a* ao lado de *b* e abaixo de *a* escrevemos por ordem crescente todas as potências de 2 que são menores que *a* ($2^0=1$; $2^1=2$; $2^2=4$; $2^3=8$; ...);

2.º abaixo de b, em cada linha a partir da segunda, duplicamos o valor da linha anterior;

3.º de baixo para cima assinalam-se as linhas, cujos valores da primeira coluna adicionados resultam no valor de *a*;

4.º adicionam-se os valores da segunda coluna das linhas marcadas.

Parece complexo? Na realidade não é. Repare-se que basicamente basta saber calcular dobros (o dobro de 43 é 86; o dobro de 86 é 172 e assim sucessivamente). Vejamos um exemplo ilustrativo (figura 33) para o cálculo de 18x43, através destes 4 passos.

1.º passo		2.º passo		3.º passo		4.º passo
18	**43**	**18**	**43**	**18**	**43**	688+**86**=**774**
1		1	43	1	43	Logo 18x43=774
2		2	86	**2**	**86**	
4		4	172	4	172	
8		8	344	8	344	
16		16	688	**16**	**688**	

Figura 33 – Cálculo do produto de 18 por 43, usando o algoritmo egípcio.

Podemos questionar se é indiferente tratar qualquer um dos fatores como *a* ou como *b*. De facto, sim, contudo, é normalmente mais simples colocar o menor à esquerda e o maior à direita, para evitar o número de duplicações.

O outro algoritmo que gostaríamos de apresentar é o **algoritmo da gelosia**. Ainda que seja semelhante ao algoritmo da gelosia para a adição, tem algumas especificidades na multiplicação. Vejamos um exemplo (82x437) que permite perceber a sequência de passos para utilização deste algoritmo (figura 34).

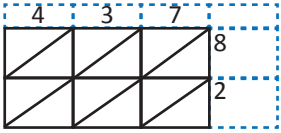
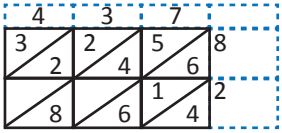
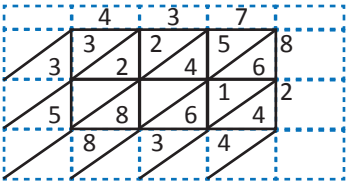
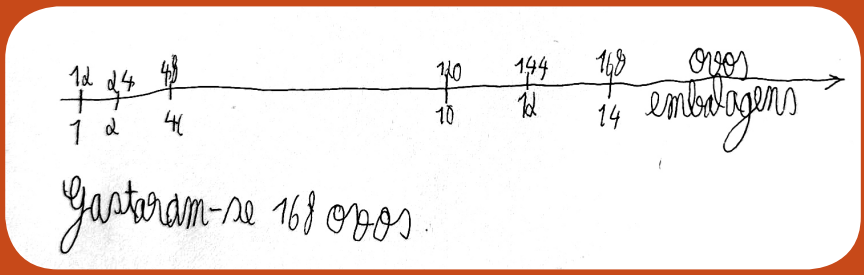
1.º passo - desenha-se uma grelha retangular com 3 colunas e 2 linhas; uma linha diagonal é desenhada através de cada um dos seis retângulos. *Nota: o número de colunas e linhas deve corresponder ao número de algarismos que compõem cada número.*	
2.º passo - os produtos de cada par de dígitos são escritos nos retângulos; as unidades abaixo da diagonal e as dezenas acima da diagonal.	
3.º passo – depois de efetuar as adições ao longo das diagonais, começando pela direita, a resposta obtém-se através da leitura dos algarismos obtidos (da direita para a esquerda). 437x82 = 35834	

Figura 34 – Cálculo do produto de 437 por 82 com o algoritmo da gelosia.

TAREFA 16

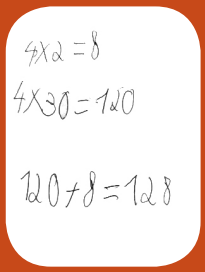
1. Considere o seguinte problema: "Na cantina da escola da Maria gastaram-se, numa semana, 14 dúzias de ovos. Quantos ovos se gastaram?" e observe a seguinte resolução de uma criança do 2.º ano.



1.1. Analise a resolução, **explicitando** as estratégias utilizadas.

2. Observe a forma como uma criança do 2.º ano calculou 4x32.

2.1. Analise a resolução, **explicitando** a estratégia utilizada.



2.2. Antecipe outras estratégias que as crianças poderiam utilizar. **Discuta** a sua adequação.

3. Tradicionalmente as tabuadas são abordadas a partir de situações reais envolvendo a adição sucessiva de objetos, n vezes. Contudo, esta estratégia didática não é potenciadora do uso diversificado de estratégias de cálculo mental, na construção das tabuadas. São mais interessantes, do ponto da aprendizagem, propostas didáticas que visem o uso das propriedades da multiplicação e o uso de relações numéricas. **Discuta** o alcance desta afirmação e apresente uma proposta para abordagem da tabuada do 6.

4. Calcule mentalmente, explicitando o raciocínio e identificando as propriedades e relações numéricas utilizadas.

a) 21 x 62 b) 18 x 5 c) 4 x 13 x 25

d) 39 x 13 e) 44 x 50 f) 2 x 540

5. Efetue a operação 125 x 45, recorrendo ao:

(a) algoritmo da gelosia.

(b) algoritmo egípcio.

3.3. Divisão

3.3.1 Sentidos da divisão

Na divisão podemos considerar três sentidos distintos em função do contexto: a divisão como **partilha**, a divisão como **medida** e a divisão como **razão**.

O sentido de **partilha** pode ser ilustrado com o seguinte exemplo: "A Maria distribuiu igualmente os 24 bombons por 4 crianças. Quantos bombons recebeu cada criança?". Nesta situação, uma dada quantidade (24 bombons) é repartida igualmente por um dado número de recetores (4 crianças) e pretende-se determinar com quantos bombons fica cada criança, considerando a partilha equitativa, isto é, pretende-se determinar o tamanho dos grupos.

O sentido de **medida** pode ser ilustrado com o seguinte exemplo: "Temos 24 bombons e queremos fazer saquinhos com 4 bombons cada um. Quantos saquinhos conseguimos fazer?". Neste caso, é dado o número

total de objetos (24 bombons) e o número de objetos de cada grupo (4 bombons) e pretende-se determinar o número de grupos. Apesar de ambas as situações serem modeladas pela mesma expressão numérica (24:4), representam, na realidade, operações mentais diferentes, muito dependentes das caraterísticas dos contextos, como detalharemos mais adiante.

O sentido de **razão**, mais complexo que os anteriores, não envolve partição ou agrupamento, mas antes a ideia de comparação entre duas quantidades, ou seja, é a comparação entre duas medidas da mesma grandeza. Como exemplo de uma situação envolvendo o sentido de razão temos: "Num folheto, existem dois modelos de televisão. O modelo A que custa 900€ e o modelo B custa 300€. A televisão A custa quantas vezes mais que a B?". Nos primeiros anos, espera-se que as crianças percebam que o custo do primeiro é o triplo do custo do segundo e, por outro lado, a custo do segundo é a terça parte do custo do primeiro.

O quadro 11 sistematiza os sentidos da divisão, ilustrando-os com novos exemplos.

Operação	Sentido	Descrição	Exemplos
Divisão	Partilha	Situações em que se procura determinar o número de objetos de cada grupo.	*Um hotel recebeu uma encomenda de 56 rosas e pretende repartí-las igualmente pelas 7 jarras da receção. Quantas rosas colocarão em cada jarra?*
	Medida	Situações em que se procura determinar o número de grupos.	*Um museu recebeu, numa manhã, 48 crianças. A visita é feita em grupos de 8 crianças. Quantos grupos foram feitos?*
	Razão	Situações em que se sugere a comparação entre duas medidas da mesma grandeza.	*O pai do Martim mede 1,80m e o irmão mais novo do Martim mede 0,90m. Qual é a relação entre as duas alturas?*

Quadro 11 – Sentidos da divisão.

Tradicionalmente, tendemos a pensar que um problema que envolve a divisão como partilha é mais simples para os alunos do que um problema que envolve a divisão como medida. Esta conceção, alicerçada na perceção que partilhar é uma ideia mais familiar para as crianças, leva,

muitas vezes, os professores a privilegiar os contextos de partilha em detrimento dos contextos de medida. Contudo, se analisarmos as estratégias iniciais, usadas pelas crianças, na resolução de problemas de um e de outro tipo, verificamos que: (i) nos problemas de partilha, as crianças tendem a distribuir os objetos, um a um, pelos grupos, o que é uma estratégia pouco eficaz, além de propiciar o erro; ii) nos problema de medida, as crianças tendem a usar a adição (ou a subtração) e a multiplicação (enquanto operação inversa da divisão).

Defendemos que os dois tipos de problemas devem ser colocados aos alunos, de modo a que percebam as relações que existem entre eles. Independentemente do sentido da operação, quando os alunos conseguirem perceber a relação existente entre a multiplicação e a divisão, ganharão desembaraço na resolução dos problemas dos dois tipos. O recurso ao modelo retangular é uma importante ferramenta para tornar visível essa relação, ao mesmo tempo que relaciona, na exploração de um mesmo contexto, o sentido de partilha e o sentido de medida. Vejamos o exemplo de um tabuleiro retangular onde se vão dispor 40 bolachas, organizadas em filas com o mesmo número de bolachas. Se pensarmos em problemas a enunciar, surgem dois de imediato:

i) Se colocarmos 8 bolachas em cada fila, quantas filas terá o tabuleiro?
ii) Se fizermos 5 filas, quantas bolachas terá cada fila?

No primeiro problema que é de medida, as crianças podem pensar (e organizar) filas de 8 bolachas, reconhecendo que fazem 5 filas de 8 bolachas; dando significado às expressões 5x8=40 e 40:8=5. No segundo problema que é de partilha, as crianças podem pensar (e organizar) 5 filas, procurando o tamanho das filas, que tem de ser de 8 bolachas; dando significado às expressões 8x5=40 e 40:5=8. A compreensão destas relações deve assentar, por um lado, na visualização e análise de modelos ativos e pictóricos das duas situações; e, por outro, numa intensa discussão entre os alunos, com o professor envolvido, naturalmente, de modo a que sejam evidenciados os aspetos relevantes não só de cada um dos problemas, mas sobretudo das relações entre os dois problemas.

O uso da multiplicação é, de facto, uma ferramenta potente que aparece de forma natural como estratégia de resolução de problemas de medida e que pode depois ser utilizada, quando compreendida, também nos problemas de partilha. Aliás, ao nível do cálculo mental, quando reconhecemos a relação entre divisão e multiplicação, é a ela que recorre-

mos para determinar um quociente. Por exemplo, num restaurante para dividir uma despesa de 60€ por 4 pessoas, pensamos no número que multiplicado por 4 é igual a 60 (60:4=15 porque 4x15=60).

Em síntese, durante a fase de formação de conceitos e procedimentos relativamente à divisão, os alunos devem contactar com problemas muito diversificados onde tenham oportunidade de usar estratégias informais e, gradualmente, ir substituindo estratégias informais ou formais de natureza aditiva ou subtrativa, por estratégias formais multiplicativas, até que a relação entre multiplicação e divisão possa, de forma simples, ser explicitada na forma *a:b=c* porque *cxb=a*.

No estudo da divisão, para além da atenção aos seus diferentes sentidos, é importante ter em atenção que há situações em que é fundamental dar sentido ao resto, quando a divisão inteira não é exata. Na divisão não exata, ao operar, determinamos um quociente e um resto e se, em alguns problemas, o resto não é importante, noutros, considerar o resto é essencial para responder corretamente. De facto, no estudo da divisão, os alunos devem ser confrontados com situações que produzam um resto e devem ser capazes de perceber o que esse resto significa, qual o seu valor máximo para um dado divisor e como interpretá-lo em diferentes contextos. O quadro 12 sistematiza situações de divisão não exata em que o resto assume diferentes papéis.

Papéis do resto	**Exemplos**
O resto, não sendo a resposta ao problema, tem de ser considerado para responder corretamente.	Para um jantar estão convidadas 30 pessoas. Em cada mesa podem sentar-se 8 pessoas. Quantas mesas são necessárias?
Para responder corretamente, o resto não deve ser considerado.	Para fazer um bolo são precisos 4 ovos. Quantos bolos se podem fazer com 17 ovos?
O resto é a resposta ao problema.	O Mateus tem 26 cromos para arrumar igualmente em 5 carteiras. Quantos cromos ficam por arrumar?
Não pode haver resto (a resposta inclui uma parte fracionária).	O João comprou 4 pizas pequenas para repartir, igualmente, entre si e mais 2 amigos. Que quantidade de piza calha a cada um?

Quadro 12 – Diferentes papéis do resto da divisão não exata, num contexto de resolução de problemas.

Frequentemente, observamos alguma falta de rigor no uso do sinal de igual na escrita de proposições em que a operação divisão está presente. Se na divisão de 20 por 5 não há qualquer problema em escrever 20:5=4, já quando a divisão não é exata há que ter maior cuidado. Por exemplo, na divisão de 21 por 5, não há um número natural que multiplicado por 5 dê 21. Neste caso, existem dois inteiros, o 4 e o 1, designados respetivamente por quociente e resto que verificam a igualdade: 21=5x4+1. Adicionalmente, a forma de escrever corretamente umaproposição que envolva a designação 21:5 é escrever que $21:5=4+\frac{1}{5}$. Na sala de aula, o professor deverá evitar a escrita de proposições nestas situações, levando os alunos a registar de forma independente o quociente e o resto da divisão (Q=4; r=1).

3.3.2. Cálculo mental e escrito na divisão

Atendendo ao momento em que colocamos problemas de divisão aos alunos, a maioria das vezes quando estes já trabalharam as outras operações elementares, é natural que recorram aos conhecimentos das outras operações para pensar nas situações de divisão. Isto significa que as crianças vão, naturalmente, usar uma multiplicidade de estratégias. Uma estratégia comum nos problemas de medida é usar precisamente a medida (tamanho dos grupos) e repeti-la de forma aditiva (ou subtrativa) até obter uma quantidade igual ao dividendo. Esta estratégia é visível quando, num contexto em que se pergunta quantas jarras são precisas, quando temos 15 rosas e se colocam 3 rosas em cada jarra, as crianças fazem 3+3+3+3+3=15 ou 15-3-3-3-3-3=0 e respondem que são precisas 5 jarras. Ainda que semelhante a esta, mas mais sofisticada é usar a operação inversa, como aliás já referimos na secção anterior, e procurar imediatamente o número que multiplicado por 3 é igual a 15. Esta estratégia é muito adequada quando o divisor é uma potência de 10. Por exemplo, 240:10=24, porque 10x24=240. Mais uma vez temos a relação inversa como suporte do cálculo mental. A estratégia de uso da operação inversa, que pode ser utilizada também a problemas de partilha, pode envolver o uso intuitivo da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Como exemplo, consideremos a divisão de 144 por 12. A criança pode pensar em 10x12=120 e 2x12=24 e concluir que 144:12=12. Estes exemplos reforçam a importância do desenvolvimento do cálculo mental multiplicativo como suporte ao cálculo mental em situações de divisão, pelas conexões que existem entre uma e outra operação.

Salientaríamos ainda outras três estratégias de cálculo mental muito úteis na divisão. A primeira assenta na ideia de metade e quarta parte (em relação com a ideia de dobro e de quadruplo). Por exemplo, para calcular 240:4, as crianças podem pensar na metade da metade, isto é fazer 240:2:2 = 120:2 = 60. A segunda é a estratégia de substituição. Por exemplo, para calcular o quociente de 230 por 5, a criança pode dividir por 10 e compensar, o que corresponde a fazer 230:10x2 = 23x2 = 46. Finalmente, a terceira estratégia, usa a distributividade da divisão relativamente à adição, à direita. Por exemplo, para dividir 135 por 5, a criança pode decompor o 135 em 100+35 e pensar 100:5 + 35:5 = 20+7 = 27. Neste caso, temos uma decomposição decimal. Outro exemplo, agora de decomposição não decimal seria, por exemplo, para dividir 72 por 4, pensar em 40:4 + 32:4 = 10 + 8 = 18. Salientamos, contudo, que é importante que as crianças percebam que, ao contrário da multiplicação, na divisão não se verifica distributividade à esquerda, isto é, por exemplo, para dividir 60 por 12, não podem dividir 60 por 10 e adicionar este quociente ao quociente que resulta da divisão de 60 por 2.

No quadro 13 apresenta-se uma categorização para as estratégias de cálculo mental e escrito apresentadas nos parágrafos anteriores, ilustrando-as com novos exemplos.

Estratégia	Exemplos
Uso da operação inversa	99:11 = 9 porque 9x11=99
	130:10 = 13 porque 13x10=130
	210:15 = 14 porque (10x15+4x15=210)
Uso da relação dobro/ metade	160:4 = 160:2:2 = 80:2 = 40
	120:8 = 120:2:2:2 = 60:2:2 = 30:2 = 15
Substituição	90:5 = 90:10 x2 = 9x2 =18
	650:50 = 650:10 x2 = 65x2 =130
Decomposição	330:6 = 300:6 + 30:6 = 50+5 = 55
	81:3 = 60:3 + 21:3 = 20+7 = 27

Quadro 13 – Principais estratégias de cálculo mental e escrito na divisão.

Como é fácil de perceber, pelos exemplos que já apresentámos, as estratégias adequam-se a determinados números (ou relações entre números) e não a todos. Devem por isso ser vistas como adequadas num contexto de sentido de número, em que a flexibilidade para calcular é um princípio importante.

É importante salientar ainda que as estratégias identificadas no quadro 13 devem ser desenvolvidas pelos e com os alunos, de modo flexível, apostando na sua compreensão, no contexto de tarefas significativas. Estas tarefas podem ter a intencionalidade de estabelecer conexões internas entre as operações e a álgebra, em particular no estudo de igualdades aritméticas, envolvendo expressões numéricas equivalentes. Aliás, a preocupação de aprofundamento da compreensão do sinal de igual deve estar sempre presente no registo de estratégias de cálculo mental, em qualquer uma das quatro operações elementares.

3.3.3. Algoritmos para a divisão

A investigação em Educação Matemática nas últimas décadas tem vindo a mostrar a dificuldade de aprendizagem do **algoritmo tradicional da divisão**, por ser demasiado sintético e exigir vários cálculos intermédios que não são registados. Quando falamos de algoritmo tradicional estamos a fazê-lo do ponto de vista da realidade portuguesa já que, em muitos dos países anglo-saxónicos, ele não é utilizado. De facto, o algoritmo tradicional é de difícil aprendizagem e quando não é utilizado frequentemente é facilmente esquecido, porque implica a memorização, quase sempre sem compreensão, de um conjunto de regras de manipulação dos dígitos, onde o sentido de número está pouco presente. Diríamos mesmo que este algoritmo trabalha contra o sentido de número já que as crianças deixam de pensar na grandeza dos números envolvidos, o que vai limitar de forma expressiva, por exemplo, a capacidade de avaliar a razoabilidade dos resultados obtidos e a sensibilidade para procurar erros.

Comecemos por analisar um exemplo concreto. Para dividir 2667 por 25, com o algoritmo tradicional, separamos os dígitos do dividendo de modo a obter à esquerda um valor superior ao divisor, neste caso 26 e temos de pensar: “quantas vezes o 25 cabe no 26?”. Cabe uma vez, logo o valor de maior ordem do quociente é 1. Continuamos multiplicando 1 por 25 que dá 25 e calculamos a diferença entre 26 e 25 que é 1. Os passos descritos acima correspondem ao registo do esquema mais à esquerda da figura 35.

2667	25
1	1

2667	25
16	10

2667	25
167	106
17	

Figura 35 – Esquematização da sequência de passos do algoritmo tradicional na divisão de 2667 por 25.

A realização do algoritmo continua, com a ação de baixar o algarismo 6 (das dezenas) e aqui surge um caso particular deste algoritmo. Teríamos de dividir 16 por 25, contudo, o quociente é menor que 1, então temos de colocar zero no quociente. Continuamos baixando o 7. Ficamos com o número 167 para dividir por 25. O procedimento indica que pensemos assim: "em 16, quantas vezes há 2?", repare-se que estamos a olhar para as quantidades correspondentes de maior ordem. A resposta é 8, pelo que devemos colocar 8 no quociente. Contudo, iriamos verificar, multiplicando 8 pelos algarismos de 25 que obteríamos um produto superior a 167. O algoritmo diz-nos que, nesta situação, devemos reduzir sucessivamente o valor do algarismo até que o produto obtido seja menor que 167. Se experimentarmos o 7 vamos verificar que ainda ultrapassa. Verificando o 6, determinamos um produto menor que 167 e calculamos, pela diferença, que o resto é 17. Portanto, o quociente é 106 e o resto é 17.

Em algumas variantes deste algoritmo, registam-se passos intermédios, em particular, a subtração, debaixo do dividendo, dos produtos que se obtêm quando se multiplicam os dígitos do quociente pelo divisor.

Ora, defendemos que aos alunos devem ser dadas oportunidades de construir, compreender e usar algoritmos que sejam coerentes com uma lógica de desenvolvimento de sentido de número e, se possível, que suportem esse desenvolvimento. Existe um algoritmo, amplamente usado noutros países, que nos permite assegurar estes princípios, é o **algoritmo da divisão por estimativa do quociente**. Este algoritmo pode assumir diferentes formas de registo. Optaremos por uma que se aproxima da forma de registo do algoritmo tradicional, apesar das diferenças profundas entre os dois.

No algoritmo por estimativa do quociente há duas ideias centrais: i) devemos sempre pensar globalmente nos números envolvidos, isto é, na sua ordem de grandeza; ii) o procedimento, ainda que tenha flexibilidade, assenta na realização de boas estimativas do quociente a partir de produtos de referência. É importante referir que à segunda ideia subjaz

a necessidade de uma boa proficiência de cálculo mental multiplicativo, em particular na multiplicação por 10, 100 ou 1000 e nas relações dobro/metade.

Retomemos o exemplo usado acima, 2667:25. O primeiro passo é determinar um produto, o mais próximo possível do dividendo, operando o divisor por um número redondo. Facilmente verificamos que é possível fazer 100 grupos de 25, porque 100x25=2500 (valor que é bastante próximo do dividendo). Sabemos que o quociente é, pelo menos, 100, então registamos esse valor e retiramos 2500 a 2667. Repare-se que esta subtração é muito simples e pode ser feita mentalmente, aliás como vai aconteceu quase sempre, porque são utilizados números redondos. Verifica-se que falta dividir 167 por 25. Quantos grupos de 25 há em 167? Ora sabíamos que 10x25=250, então, se pensarmos na metade, verificamos que 5x25=125. Podemos fazer mais 5 grupos de 25. Registamos 5 no quociente e subtraímos 125 a 167. Resta dividir 42 por 21. Com 42 só é possível fazer um grupo de 25 e sobram 17. Finalmente, para determinar o quociente, basta adicionar os grupos formados (100+5+1=106).

Este processo está ilustrado na figura 36.

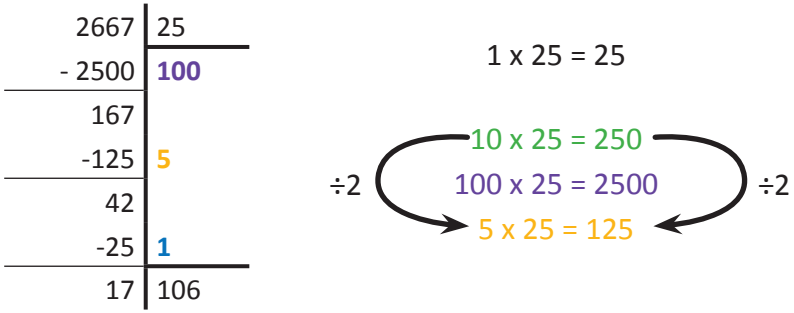


Figura 36 – Exemplo do cálculo da divisão de 2667 por 25 pelo algoritmo da estimativa do quociente.

Propositadamente, apresentámos o algoritmo sem referir qualquer contexto. Contudo, a sua compreensão é ainda mais simples se dermos contexto aos números. Imagine que estamos a falar de 2667kg de batatas que foram colhidas numa herdade e que vão ser ensacadas em sacos de 25kg e pretende-se saber quantos sacos se poderão fazer. Uma pergunta a colocar é se conseguiremos obter 1, 10, 100, 1000 sacos? É evidente que o número 100 é um bom número aproximado para os sacos possí-

veis. Adicionalmente, conclui-se facilmente que dos 2667kg, 2500kg ficam ensacados nos 100 sacos (porque 100x25=2500). Basta pensar em quantos sacos são precisos para ensacar os 167kg restantes e assim sucessivamente.

Numa fase inicial de trabalho com o algoritmo, o nível de adequação das estimativas pode ser muito diferente de aluno para aluno, mas à medida que o trabalho vai progredindo estas vão sendo otimizadas. Diríamos aliás, que esta dimensão flexível do algoritmo, permite um melhor ajustamento à diversidade de alunos que existem na sala de aula, sendo coerente com princípios de respeito pela equidade. A figura 37 procura ilustrar essa diversidade para a divisão de 376 por 6.

376	6	1x6=6
-120	**20**	10x6=60
256		20x6=120
-120	**20**	2x6=12
136		
-120	**20**	
16		
-12	**2**	
4	**62**	

376	6	1x6=6
-300	**50**	10x6=60
76		100x6=600
-60	**10**	50x6=300
16		
-12	**2**	
4	**62**	

Figura 37 – Dois exemplos do cálculo da divisão de 376 por 6 pelo algoritmo da estimativa do quociente.

A figura 37 não representa uma outra escolha usada por alguns alunos, que é optar pelo quociente 10 e fazer sucessivamente grupos de 10. Esta escolha é normalmente morosa. Contudo, é importante que sejam os alunos a perceber que podem reduzir o número de passos se fizerem uma melhor estimativa inicial. Na resolução da esquerda, representa-se um nível intermédio de proficiência em que, a partir do produto por 10, se fez a duplicação, optando por usar sucessivamente grupos de 20. Na resolução da direita temos uma resolução mais otimizada, que recorre a um agrupamento de 50, o que reduz o número de passos necessários.

Do ponto de vista da aprendizagem, é estratégico que, inicialmente, sejam propostos aos alunos situações envolvendo números pequenos que permitam a compreensão do algoritmo e uma solução rápida e só depois divisões que envolvam números maiores. Gostaríamos de reforçar outra dimensão, já referida anteriormente, que é a necessidade de ter existido um trabalho prévio, consistente, ao nível do desenvolvimento do cálculo mental e escrito na multiplicação e na divisão. De nada serve introduzir este algoritmo se a criança não é capaz de calcular rapidamente produtos de referência e, a partir destes, calcular produtos que resultam da variação de um fator. Por exemplo, na divisão de 1698 por 83, se estimarmos usando o fator 10 (10x83=830) é importante reconhecer que a duplicação é muito adequada (20x83=1660); o mesmo pode acontecer com a metade, por exemplo na divisão de 474 por 83, em que usando o fator 10 temos 10x83=830 e o recurso à metade (5x83=415) permite uma excelente estimativa.

O algoritmo da divisão por estimativa do quociente tem inúmeras vantagens do ponto de vista da aprendizagem:

i) não existe qualquer descontinuidade entre a aprendizagem do algoritmo quando o divisor tem 1 algarismo ou quando tem mais algarismos, ao contrário do que acontece com o algoritmo tradicional;

ii) a dimensão compreensiva dos processos envolvidos dá confiança à criança e permite-lhe experienciar sucesso na divisão;

iii) a aprendizagem deste algoritmo resiste à passagem do tempo porque é significativa e assenta na compreensão e não na memorização;

iv) facilita a avaliação da razoabilidade do quociente obtido, no contexto dos números envolvidos e influencia positivamente a capacidade de avaliar a importância do resto num problema colocado.

Do ponto de vista histórico, é importante referir outro algoritmo, o **algoritmo da divisão egípcio**, que mais não é que o retomar do algoritmo da multiplicação egípcio apresentado anteriormente. Aliás, para um escriba egípcio, dividir *a* por *b* significava pensar por quanto tinha de multiplicar *b* para obter *a*.

Suponhamos que queremos obter o quociente de *a* por *b*; o algoritmo utilizado pelos egípcios pode ser descrito da seguinte forma:

1.º escrevemos *a* ao lado de *b* e abaixo de *a* escrevemos 1 (2^0) e abaixo de *b* repete-se *b*;

2.º nas linhas seguintes, escrevemos sucessivamente os dobros dos números anteriores, até que a soma dos números da coluna do divisor permitam obter o valor do dividendo;

3.º assinalam-se, na segunda coluna, os números que adicionados igualem ou se aproximem do valor do dividendo (sem o ultrapassar), subtraindo-os sucessivamente àquele. O resultado obtido é o resto;

4.º a soma das potências de 2 assinaladas é o quociente; o resto resulta da diferença entre o dividendo e a soma dos números assinalados na 2.ª coluna.

Vejamos um exemplo ilustrativo (figura 38) para o cálculo de 812:39, através destes 4 passos.

1.º passo		**2.º passo**		**3.º passo**		**4.º passo**
812	**39**	**812**	**39**	**812**	**39**	**Q = 16+4 = 20**
1	39	1	39	1	39	**R** = 812–(**624+156**) = 812-780 = **32**
		2	78	2	78	
		4	156	**4**	**156**	
		8	312	8	312	
		16	624	**16**	**624**	

Figura 38 – Cálculo do quociente e do resto da divisão inteira de 812 por 39 usando o algoritmo egípcio.

TAREFA 17

1. Formule dois problemas, um envolvendo com o sentido de partilha e outro com o sentido de medida.

2. Calcule, mentalmente, explicitando o raciocínio utilizado.

a) 32 : 4 **b)** 410 : 5 **c)** 225 : 25

d) 240 : 6 **e)** 90 : 5 **f)** 60 : 6

3. Efetue as seguintes operações, recorrendo ao algoritmo da estimativa do quociente.

a) 835 : 24 **b)** 1219 : 53 **c)** 6434 : 134

4. Efetue as operações recorrendo ao algoritmo egípcio.

a) 528 : 12 **b)** 1341 : 26 **c)** 3475 : 54

Exercícios e problemas globais

1. Faça corresponder cada item da coluna A a um item da coluna B.

Coluna A - Problema	Coluna B - Sentido
I - Uma caixa de ovos tem 12 ovos. Quantos ovos têm 8 caixas?	A – Medida
II – Para a festa da escola, professor de música ensaiou um coro com 36 participantes. Sabendo que estarão organizados em filas de 9 alunos, quantas filas terá o coro?	B - Partilha
III – O João tem 48 berlindes que quer organizar em sacos com o mesmo número de berlindes. Tem 8 sacos. Quantos berlindes ficam em cada saco?	C – Aditivo
IV – Com 4 sabores de gelado e 3 *topings* disponíveis, quantas taças diferentes se podem fazer, usando um sabor e um *toping*?	D – Razão
	E – Combinatório
	F- Completar

2. Considere o seguinte problema: "Uma mesa custa 89€ e outra mesa custa 135€. Qual a diferença de preços entre as mesas?"

a) Identifique o sentido da subtração presente no problema.

b) Analise as estratégias usadas pelos seguintes alunos:

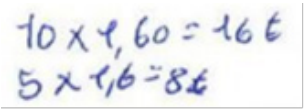
Aluno A: 89+1=90; 90+10=100; 100+35=135; 1+10+35=46

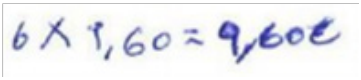
Aluno B: 135-100=35; 35+11=46

3. Utilizando as propriedades da multiplicação e relações numéricas que conhece, **resolva** as seguintes operações, mentalmente. **Explicite** o raciocínio efetuado e as propriedades utilizadas.

a) 39x13 b) 5x13x2x10 c) 44x102 d) 5x264

4. Observe a forma como um aluno do 3.º ano resolveu o seguinte problema: "Um saco de gomas custa 1,60€. Quanto custam 6 sacos de gomas?" (Mendes, 2012).





a) Analise a resolução apresentada, evidenciando a relação numérica e a propriedade usada pelo aluno.

b) Apresente um exemplo de produtos de números que estimule, de forma evidente, o uso da propriedade comutativa, para facilitar o cálculo mental.

5. Considere o seguinte problema. "A Rita quer arrumar os seus 36 livros em caixas. Sabendo que cada caixa leva 7 livros, quantos livros ficam por arrumar?".

a) Identifique o sentido do problema.

b) Indique o papel que o resto assume no contexto do problema apresentado.

c) Discuta outros papéis que o resto pode assumir no contexto do estudo da divisão e complemente a sua resposta com exemplos de problemas que evidenciam esses diferentes papéis.

6. Efetue as seguintes operações recorrendo ao algoritmo egípcio.

a) 58x34 **b)** 1271:45

7. Efetue as seguintes operações com recurso ao algoritmo da estimativa do quociente.

a) 1723: 42 **b)** 8993:62

BIBLIOGRAFIA

Anghileri, J. (2003). Issues in teaching multiplication and division. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 184–194). Buckingham: Open University Press.

Boyer, C. (1996). *História da Matemática*. São Paulo: Editorial Edgard Blücher.

Brocardo, J.; Serrazina, L. & Rocha, I. (2008). *O sentido do número – reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Lisboa: Escolar Editora.

Buys (2001). Mental arithmetic. In: M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Netherlands: Freudenthal Institute, Ultrecht University & National Institute for Curriculum Develipment.

Caraça, B. J. (1989). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Coe, M. & Houston, S. (2005). *The maya*. Thames & Hudson.

Dolk, M. & Fosnot, C. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication ans division*. Portsmouth NH: Heinemann.

Estrada, M.; Sá, C.; Queiró, J.; Silva, M. & Costa, M. (2000). *História da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Eves, H. (2011). *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing number sense, addition and subtraction*. Portsmouth NH: Heinemann.

Foxman, D. & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU survey in UK. *Educational Studies in Mathematics, 51(1-2)*, 41-69.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. Um estudo com alunos do 1.º ciclo.* (Tese de Doutoramento). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. In http://repositorio.ul.pt/handle/10451/5893.

Menezes, L. & Flores, P. (2017). O humor no ensino da matemática pode ser coisa séria. *Educação e Matemática, 141*, pp. 7-12.

Middeke-Conlin, R. (2020). *The making of a scribe – errors, mistakes and rounding numbers in the old Babylonian kingdom of Larsa*. Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática.* Lisboa: APM.

Palhares, P. (2004). *Elementos de matemática para professores do ensino básico.* Lisboa: Edições Lidel.

Rodrigues, A. & Diniz, H. (2015). Sistemas de Numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o Ensino. *Ciência e Natura 37 (3),* pp. 578-591.

Sequeira, L.; Freitas, P. & Nápoles, S. (2009). *Números e operações*. Lisboa: DGE.

Struik, D. J. (1948). *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Treffers, A. & Buys, K. (2008). Grade 2 (and 3) — Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 61–88). Rotterdam: Sense Publishers.

Verschaffel, L.; Greer, B. & de Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. II, pp. 557–628). Reston, VA: NCTM.

Este livro pretende ser uma ferramenta de trabalho com utilidade para a formação inicial e contínua de professores dos primeiros anos da Educação Básica, em particular no âmbito do trabalho desenvolvido no estudo dos números e operações.

Na Educação Básica e pensando mais especificamente nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, a formação de professores deve, na nossa perspetiva, ser feita numa lógica de aprofundamento conceptual ao nível do conhecimento sobre aquilo que é objeto de ensino e aprendizagem, mas também ao nível do aprofundamento didático relativamente à forma como as crianças aprendem matemática e à forma como esta deve ser ensinada. Acreditamos que o trabalho na formação de professores destes anos deve ser feito, não numa lógica aditiva, no sentido em que primeiro aprendem matemática e depois aprendem formas de promover aprendizagens em matemática nos seus alunos, mas antes numa lógica de inter-relação das duas

Hugo Alexandre Lopes Menino

Hugo Alexandre Lopes Menino é licenciado em ensino da matemática e ciências, pelo Politécnico de Leiria; mestre em educação, especialidade didática da matemática, pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e doutor em formação de professores, pela Universidade da Extremadura. É docente do ensino superior desde 2000 e, atualmente, professor coordenador da Escola Superior de Educação e Ciências Socais do Politécnico de Leiria, onde, além da docência em unidades curriculares de ensino da matemática e sua didática, desempenhou as funções de subdiretor, integrou vários órgãos científico-pedagógicos e coordenou quer a licenciatura em educação básica, quer o mestrado em ensino do 1.º ciclo do ensino básico e de matemática e ciências naturais no 2.º ciclo do ensino básico. É investigador integrado do Centro de Investigação em Educação e Inovação (CI&DEI), tendo participado em diversos projetos de I&D, financiados pela FCT e projetos europeus, na área da Educação. Integra o Conselho Geral do Instituto de Avaliação Educativa (IAVE) e é perito externo da Inspeção Geral de Educação (IGEC). Publicou dezenas de artigos em revistas nacionais e internacionais; é autor de livros e capítulos de livros e de manuais escolares. Integrou diversas comissões científicas de congressos de investigação internacionais.

POLITÉCNICO DE LEIRIA | ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS SOCIAIS
CI&DEI Centro de Ciências em Educação e Inovação
fct Fundação para a Ciência e a Tecnologia