

***FSplines*: um aplicativo para análise linear de estabilidade**

Chicaiza, Ángel ^a, Prola, Luis ^a, Martinez, Lorena^b e Graça, Paula^c

^a *Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Leiria.*

^b *Investigadora independente*

^c *Instituto Politécnico de Lisboa. Departamento de Engenharia Informática, Lisboa - Portugal*

Abstract: *FSplines* é uma ferramenta desenvolvida para efetuar análise linear de estabilidade de perfis de aço de secção de parede esbelta e aberta que permite a determinação das tensões (cargas e momentos) de bifurcação e seus respectivos modos de instabilidade através da aplicação do Método das Faixas Finitas.

O Método das Faixas Finitas permite analisar a estabilidade de barras prismáticas, constituindo-se numa alternativa interessante ao uso do Método dos Elementos Finitos pelas suas vantagens de simplificação e economia. No presente artigo o método faixa finitas é usado com dois tipos de funções: (i) Semi Analíticas, que usa funções de aproximação trigonométricas, reduzindo, portanto, o tempo de processamento e cuja principal limitação é a modelação de apenas barras simplesmente apoiadas nas extremidades, e (ii) com Funções Splines, onde os usuários podem modelar estruturas com todos os tipos de condições de fronteira, consumindo, entretanto, mais tempo na obtenção de resultados.

O aplicativo *FSplines* é particularmente útil na verificação de resistência dos perfis formados a frio efetuada por metodologias que requeiram os valores das cargas críticas locais e globais do elemento estrutural.

© 2019 All rights reserved.

Keywords:

Perfis estruturais formados a frio, seções de paredes finas, modos de instabilidade, cargas críticas, tensões de bifurcação, análise de estabilidade linear, método das faixas finitas, funções splines.

1. Introdução.

O *FSplines* na sua versão 1.0 (inicial) é uma ferramenta validada (inclui um guia e um software) que permite realizar cálculos de tensões de bifurcação e modos de instabilidade de estruturas de paredes finas pelo método das faixas finitas semi-analítica (*MFFSA*) e com funções do tipo splines (*MFFFS*).

É uma aplicação orientada para facilitar o trabalho de projetistas, investigadores, docentes e estudantes de engenharia civil e mecânica, no cálculo de tensões de bifurcação (cargas ou momentos críticos), assim como os respectivos modos de instabilidade de elementos estruturais de paredes finas de secção transversal aberta com diferentes condições fronteira e cargas aplicadas, características da maioria dos casos de perfis comumente usados na construção e indústria, em particular as estruturas de aço leve..

O presente trabalho baseia-se na formulação do Método das Faixas Finitas (*MFF*) desenvolvido por Cheung [1] que permite a análise de perfis estruturais prismáticos. Tem por base as rotinas numéricas desenvolvidas na tese de doutoramento de Prola [2] na área de conhecimento da estabilidade linear de perfis delgados. As informações práticas de uso da aplicação estão mostradas na dissertação de mestrado de Chicaiza [3], que desenvolveu as rotinas gráfica do programa.

O artigo estrutura-se nas seguintes cinco partes: (i) análise de estabilidade linear, (ii) método das faixas finitas, (iii) estruturação do programa, (iv) utilização da aplicação e (v) conclusões.

2. Análise Linear de Estabilidade.

A tensão crítica é o menor valor da tensão de bifurcação (correspondente ao ponto de bifurcação na trajetória de equilíbrio que passa de estável a instável) de uma estrutura pode estar associado a diferentes modos de instabilidade [2].

O conhecimento das tensões de críticas de seções (nos modos local, distorcional ou global) é um requisito para o projeto de estruturas formadas a frio presente nos mais recentes métodos de dimensionamento das estruturas de aço formado a frio [6].

As tensões críticas e modos de instabilidade dependem das propriedades geométricas e mecânicas do elemento estrutural e das suas condições de fronteira. Os diferentes modos de instabilidade, mostrados na fig. 1, podem ocorrer em elementos estruturais de paredes finas e de secção aberta sob compressão e são caracterizados como [2]:

(i) modo local: as placas (cada uma das paredes do perfil, ver fig. 1 a) são deformadas por flexão, enquanto os cantos (linhas de intersecção dos elementos da placa adjacentes) da secção transversal do elemento permanecem na mesma posição (não há translação).

(ii) modo distorcional (ver fig. 1 b): a secção transversal sofre uma deformação por distorção do conjunto banzo-reforço, onde alguns dos seus cantos podem sofrer um deslocamento da sua posição original (que o diferem do modo local).

(iii) modo global: inclui o modo de flexão (Euler), torção ou flexo-torção nas colunas e o modo lateral-torcional nas vigas. A secção transversal move-se (transversalmente à direção principal da compressão) e/ou roda, mantendo a sua forma original (deslocamento de um "corpo rígido" -ver fig. 1 c). No modo flexo-torcional (ver fig. 1 d), o elemento estrutural comprimido pode mover-se e rodar simultaneamente, preservando a forma original da secção transversal.

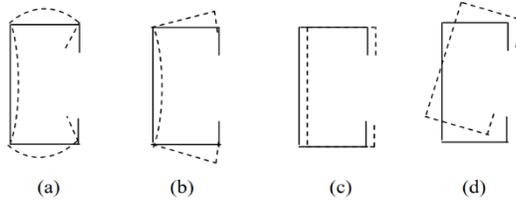


Fig. 1. Modos de instabilidade de coluna C: (a) local, (b) distorcional, (c) flexão (d) flexo-torcional [2].

Mostram-se na fig. 2 (em 3 dimensões) os diferentes modos de instabilidade de uma coluna [4].

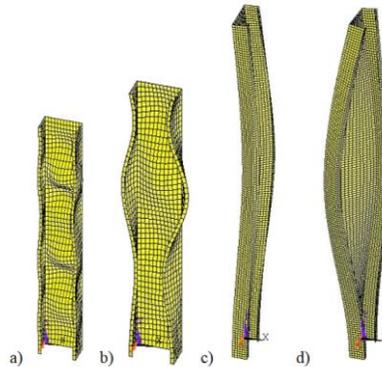


Fig. 2. Modos de instabilidade da coluna C em 3D: a) local, b) distorcional, c) flexão, d) flexo-torcional [4].

Quando o *MFFSA* é usado, os modos de instabilidade podem ser identificados mais facilmente em comparação com outros métodos (por exemplo, o método de elementos finitos), porque as tensões de difurcação são função do semi-comprimento de onda das funções trigonométricas. Na Fig. 3, a linha contínua representa a curva para um semi-comprimento onda pré-definido (que pode ser obtida através do *MFFSA*) e a linha tracejada representa o valor mínimo para todos os semi-comprimentos de onda (que pode ser obtido através do *MFFSA*, menor valor de todos os semi-comprimentos agrupados; ou diretamente pelo *MFFFS*, que apresenta o mesmo formato de resultados que o método dos elementos finitos) [5].

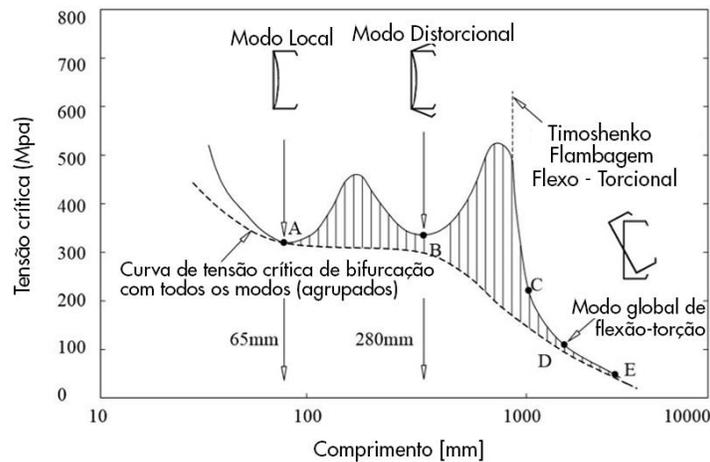


Fig. 3. Tensões de bifurcação dos modos de instabilidade vs comprimento de uma coluna C [5].

Na fig. 3, (i) o primeiro valor mínimo (ponto A) da curva da linha contínua, para um semi-comprimento de onda, está relacionado ao modo local, (ii) o valor do segundo mínimo (ponto B) em está associado com o modo de distorcional, e (iii) a última parte descendente da curva, associada com o modo global.

3. Método das Faixas Fintas.

A discretização do elemento estrutural pelo *MFF* consiste na divisão das paredes em várias faixas, que são paralelas entre si. As faixas não mudam sua largura ao longo de seu eixo longitudinal e estão conectados umas às outras (ou seja, as faixas não têm movimentos independentes, mantendo a compatibilidade parcial em suas interfaces) [1, 2]. A fig. 4 mostra o modelo de um elemento discretizado pelo *MFF*.

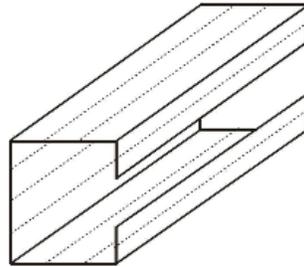


Fig. 4. Discretização de um elemento estrutural em faixas finitas [2].

3.1. Método das Faixas Finitas Semi-Analítico (*MFFSA*).

O *MFFSA* é um método que aproxima o campo de deslocamentos longitudinais (de membrana e flexão) com funções trigonométricas. Sua principal vantagem é a economia de tempo de processamento, porém limita-se à análise de elementos estruturais com uma configuração geométrica regular (como perfis prismáticos de paredes finas) com extremidades simplesmente apoiadas [1, 2].

3.2. Método das Faixas Finitas com Funções B_3 -Spline (*MFFS*).

Há vários tipos de funções splines, que são usadas de acordo com o problema a resolver. A formulação do *FSplines* utiliza a função cúbica básica B_3 -spline [8] no processo de aproximar os deslocamentos na direção longitudinal [9], proposta por Cheung [10] e Fan [8].

O *MFFFS* mantém os polinômios transversais de interpolação usados no método das faixas finitas tradicional (*MFFSA*) (outras funções podem ser usadas [11]), porém substitui as funções trigonométricas longitudinais [8] por uma combinação lineal somatório) de funções cúbicas básicas B_3S [7,8] no comprimento [9]. Uma vantagem do *MFFFS* frente ao *MFFSA*, é a possibilidade de obter melhores aproximações (resultados) nos deslocamentos da direção longitudinal [12]. Adicionalmente, o *MFFFS* permite fazer análises com condições de fronteira mais complexas (por exemplo, fixo-fixo, fixo-livre, rigidez de molas).

As faixas finitas têm quatro graus de liberdade em cada “estação” (divisão longitudinal da faixa finita usadas para definição das funções splines) em cada linha nodal, que são representadas por u, v, w e θ [7]. Para as deformações no plano u e v (de membrana), a condição de estado plano de tensões é assumida, enquanto para os deslocamentos fora do plano w e θ , a teoria de Kirchhoff (teoria das placas) é aplicada [7].

Os deslocamento são obtidos a partir do produto de deslocamentos nodais pelas funções de forma (tanto na direção longitudinal quanto na transversal) [7].

Na direção transversal, assume-se a função de interpolação de Hermite para deslocamentos de flexão w e θ , enquanto a função de interpolação de Lagrange é assumida para os deslocamentos de membrana u e v [7,12].

Na direção longitudinal, a função cúbica spline B_3S é dividida em quatro segmentos (representados pela letra h) de igual comprimento, mas com diferentes combinações de polinômios em cada segmento, como ilustra a fig. 5 [2, 7]. A função spline está definida na expressão (1).

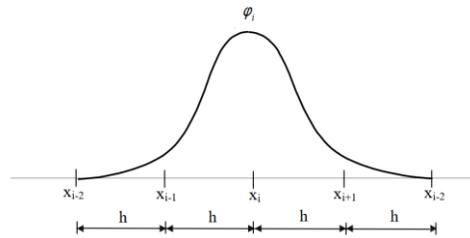


Fig. 5. Função cúbica B_3S em um domínio genérico [2]

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 0 & x \leq x_i - 2h \\ (x - x_i + 2h)^3 & x_i - 2h \leq x \leq x_i - h \\ h^3 + 3\{h^2(x - x_i + h) + h(x - x_i + h)^2 - (x - x_i + h)^3\} & x_i - h \leq x \leq x_i \\ h^3 + 3\{h^2(x_i + h - x) + h(x_i + h - x)^2 - (x_i + h - x)^3\} & x_i \leq x \leq x_i + h \\ (x_i + 2h - x)^3 & x_i + h \leq x \leq x_i + 2h \\ 0 & x \geq x_i + 2h \end{cases} \quad (1)$$

Uma função arbitrária $f(x)$, desenvolvida em um intervalo, pode ser aproximada pelo uso de funções B_3S no intervalo $a \leq x \leq b$. O intervalo o é subdividido em m partes com um comprimento $h = (a-b)/m$, e assim $(m + 3)$ "estações" são criadas para definir as funções splines (os esquemas com funções B_3S introduzem um intervalo adicional em cada extremidade), que são adicionados aos m subintervalos (ver fig. 6) [2].

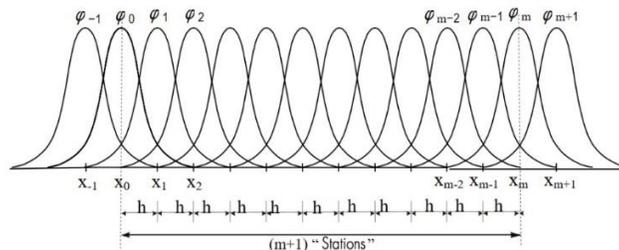


Fig. 6. Combinação linear de séries de funções B_3S [2].

Onde $f(x)$ é aproximado pela combinação linear (somatório) de $(m + 3)$ funções B_3S [2, 6, 8,12] (ver fig. 6), dada pela equação (2).

$$f(x) \approx B_3S(x) = \sum_{i=-1}^{m+1} \alpha_i \varphi_i(x) \quad (2)$$

E, onde α_{eu} representa os coeficientes a calcular (fornecido em detalhes em [2]) e $\varphi_i(x)$ as funções B_3S .

4. Estrutura general do Programa *FSplines*

O programa *FSplines* foi estruturado em linguagem Visual Basic e as rotinas de cálculo (*ALESA* e *ALESPL* desenvolvidas por Prola [2]) em Fortran, que foram transformados em ficheiros do tipo DLL. Para a solução do problema de valores próprios foi utilizado, o método do subespaço quando as matrizes de rigidez e de estabilidade são positivo-definidas e as subrotinas "LAPACK" quando existe tensões de tração aplicadas em conjunto com compressão. Na parte gráfica, as bibliotecas OpenGL e OpenTK foram usadas. Na fig. 7, mostra-se o diagrama de fluxo geral [3].

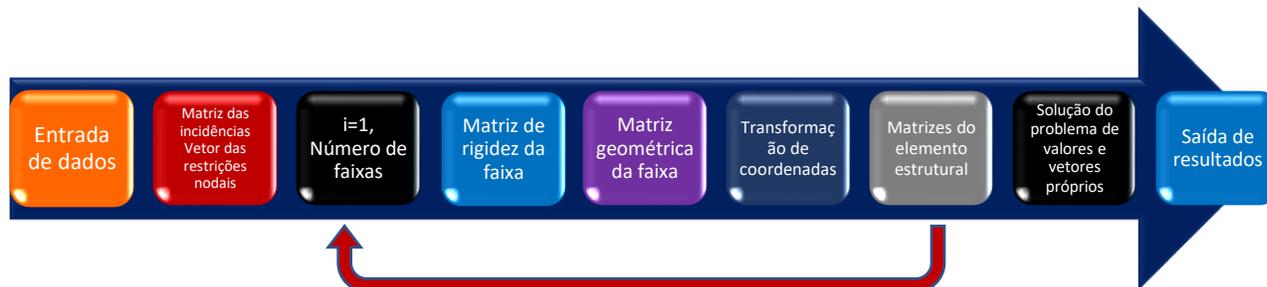


Fig. 7. Fluxograma geral dos programas *ALESA*, *ALESPL* e *FSplines* [2, 3].

5. Utilização da Aplicação

Esta seção explica simplificadamente a introdução de dados no software *FSplines* 1.0, assim como os resultados obtidos com a ajuda de três exemplos práticos.

5.1 Exemplos de aplicação do *FSplines*

5.1.1 Entrada de dados da análise de uma coluna simplesmente apoiada com o *MFFSA*

Para ilustrar a aplicação *FSplines*, escolheu-se uma coluna de aço formado a frio de secção *C* com as dimensões 101 mm x 51 mm x 5.5 mm x 1 mm (simplesmente apoiada nas extremidades), submetida à compressão axial. A seguir enumera-se a sequência de procedimentos efetuada no programa:

1. Seleção do elemento a analisar (ver fig. 8). Neste caso de estudo, a primeira opção permite modelar uma estrutura submetida à compressão uniforme.

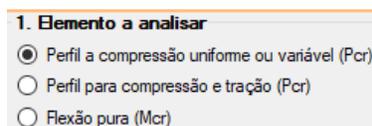


Fig. 8. Seleção do elemento a analisar

2. Introdução das propriedades do material (ver fig. 9). O programa permite introduzir os seguintes parâmetros: módulo de elasticidade nas duas direções ($E1$ e $E2$) e seus respectivos coeficientes de Poisson ($\nu1$ e $\nu2$). Para um material isotrópico (por exemplo, como o aço): " $E1 = E2 = 210000$ " (MPa); " $\nu1 = \nu2 = 0,3$ ". A seguir pressiona-se o botão "Adicionar".

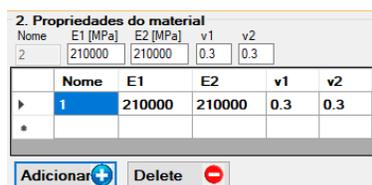


Fig. 8. Propriedades materiais.

3. Seleção do tipo de perfil (ver fig. 10), introdução das dimensões (em mm) e o número de faixas finitas de cada uma das placas (ver fig. 11). Depois de inserir as informações indicadas, o botão "Adicionar" deve ser ativado e as coordenadas da geometria do perfil são calculadas automaticamente.

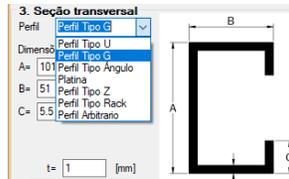


Fig. 9. Seleção do perfil tipo C

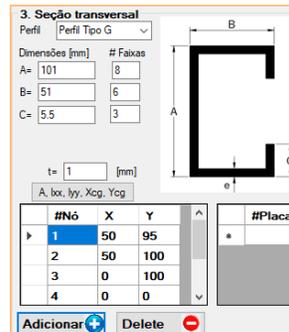


Fig. 10. Dimensões em mm

4. Atribuição de cargas (ver fig. 12). Em cada uma das placas da seção transversal, o programa atribui automaticamente uma carga parametrizada (unitária) de compressão por unidade de largura da placa.

4. Cargas					
#Placa	Sigma1	Sigma2	Sigmat	Sigmaty	Sigmatz
1	1	1	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	0
5	1	1	0	0	0

Fig. 11. Entrada das cargas.

5. Seleção do método de análise (ver fig. 13).



Fig. 12. Seleção do método de análise.

6. Definição dos parâmetros de cálculo e de discretização (ver fig. 14).

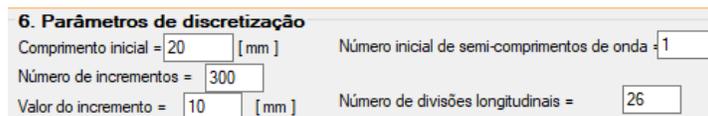


Fig. 13. Entrada de parâmetros de cálculo e de discretização do elemento estrutural.

Onde: (i) "comprimento inicial" representa o comprimento (em mm) da estrutura em que o programa inicia os cálculos, (ii) "número de incrementos" representa o número de vezes que *FSplines* executará os cálculos (incrementos), (iii) "valor do incremento" representa o comprimento (em mm) que o programa adicionará em cada um dos cálculos, (iv) "número inicial de semi-comprimentos de onda" representa o número de meio-comprimentos de onda que o usuário quer considerar e (v) "número de divisões longitudinais" é o parâmetro de discretizações no eixo longitudinal da estrutura.

7. Por último, o botão "Cálculo" deve ser pressionado para o início da execução do programa (ver fig. 15).



Fig. 14. Execução do programa.

5.1.2 Resultados da análise de uma coluna simplesmente apoiada com o *MFFSA*

1. Propriedades geométricas da secção transversal (ver fig. 16).

Área= 210
 Xcg= 14.2857142857143
 Ycg= 50
 Ixx= 355916.666666667
 Iyy= 65476.1904761905



Fig. 16. Forma e propriedades da secção transversal.

2. Curva de carga crítica vs comprimento (ver fig. 17).

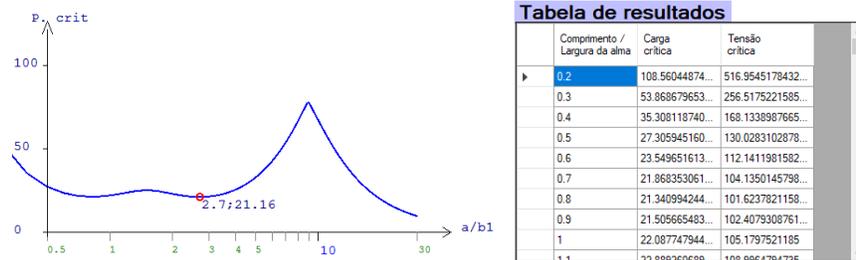


Fig. 17. Curva de carga crítica vs comprimento obtido pelo *FSplines.15*

3. Informações obtidas no *FSplines* e processadas por meio de ficheiros no programa *Excel* (ver fig. 18).

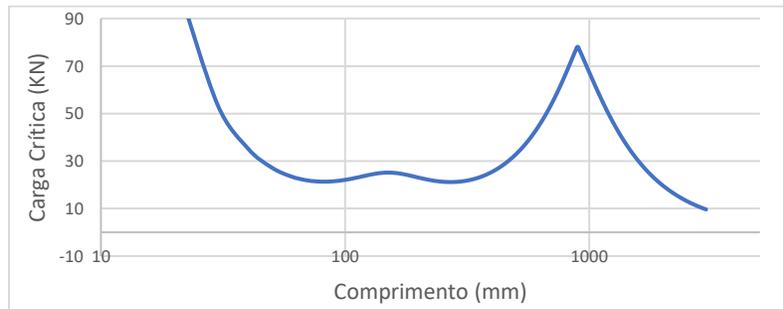


Fig. 18. Curvas processadas no *Excel16*

4. Modo de instabilidade em duas e três dimensões num ponto da curva escolhido (ver fig. 19).



Fig. 17. Modo de instabilidade em 2D e 3D obtido pelo *FSplines* (no ponto nº 26).

5.1.3. Resultados da análise de uma coluna simplesmente apoiada com o *MFFFS*

Os resultados obtidos pelo *MFFFS* são mostrados na fig. 20 e na fig. 21.

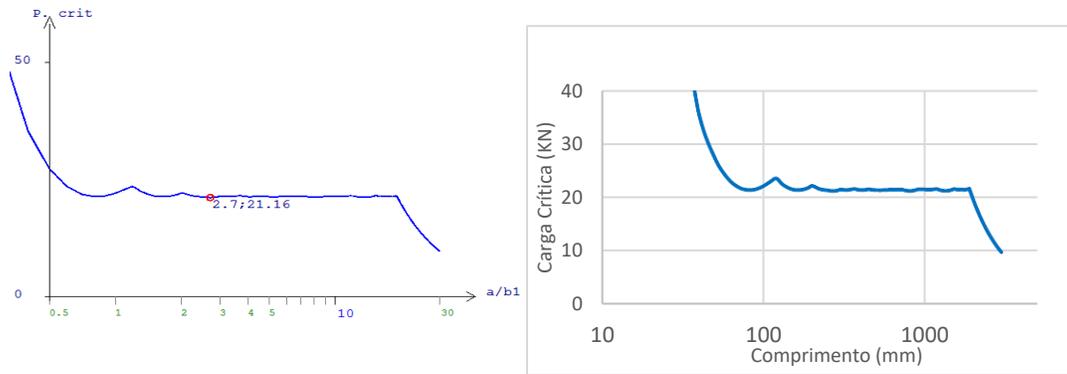


Fig. 20. Curva de carga crítica vs comprimento obtido com *MFFFS* para coluna simplesmente apoiada.

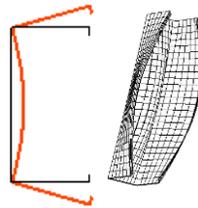


Fig. 21. Modo de instabilidade em 2D e 3D (ponto de análise n° 26).

5.1.4 Resultados da análise de uma coluna bi-encastada com o *MFFFS*

Os resultados obtidos pelo *MFFFS* são mostrados na Fig. 22 e na Fig. 23.

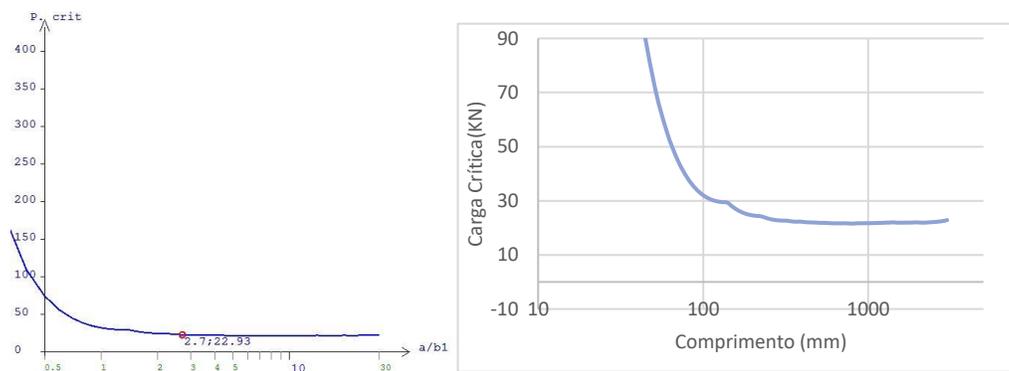


Fig. 22. Curva das cargas críticas vs comprimento obtido com o *MFFFS* de coluna bi-encastada.

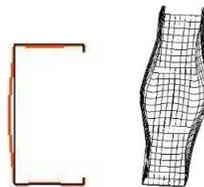


Fig. 23. Modo de instabilidade em 2D e 3D (ponto de análise n° 26).

7. Conclusões

O *FSplines* é uma ferramenta de fácil utilização que permite realizar a análise linear de estabilidade (cargas/momentos críticos e modos de instabilidade) de seções de aço formadas a frio submetidas a diferentes cargas axiais aplicadas e com diferentes condições de suporte.

É uma plataforma validada, com grande potencial de desenvolvimento que trabalha em módulos. Podem ser adicionadas diversas funções, tais como, cálculo de mais propriedades geométricas das seções, a análise não-linear da estabilidade geométrica (já está pronta a rotina numérica) e material (análise plástica, por fazer). Pode evoluir para um programa abrangente de análise estrutural com características gerais de estruturas, cargas, materiais e condições de fronteira.

Referências.

- [1] Cheung, Y. K. *Finite Strip Method in Structural Analysis*. Pergamon Press, 1976.
- [2] Prola, L. C. *Estabilidade Local e Global de Elementos Estruturais de Aço Enformados a Frio*. PhD thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2001.
- [3] Chicaiza, Ángel. *Fsplines: Una aplicación informática para análisis lineal de estabilidad de perfiles abiertos de pared fina*. Master's thesis, Instituto Politécnico de Leiria, Leiria, 2018.
- [4] Dubina, D. and Ungureanu, V. Effect of imperfections on numerical simulation of instability behaviour of cold-formed steel members. *Thin-walled structures*, 40(3):239–262, 2002.
- [5] Hancock, G. J. Murray, T. and Ellifrit, D. S. *Cold-formed steel structures to the AISI specification*. CRC Press, 2001.
- [6] Schafer, B.W. Advances in the Direct Strength Method of cold-formed steel design. *Thin-walled structures*, 140(2019):533–541.
- [7] Ajeesh, S.S. and Arul, S. Identification of buckling modes in generalized spline finite strip analysis of cold-formed steel members. *Thin-Walled Structures*, 119:593–602, 2017.
- [8] Lau, S. C. W., & Hancock, G. J. Buckling of thin flat-walled structures by a spline finite strip method. *Thin-walled structures*, 4(4):269–294, 1986.
- [9] Van, G. M. and Menken, C. M. The spline finite-strip method in the buckling analyses of thin-walled structures. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 6(6):477–484, 1990.
- [10] Fan, S.C. and Cheung, Y.K. Analysis of shallow shells by spline finite strip method. *Engineering Structures*, 5(4):255–263, 1983.
- [11] Azhari, M., Hoshdar, S., & Bradford, M. A. On the use of bubble functions in the local buckling analysis of plate structures by the spline finite strip method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(4):583–593, 2000.
- [12] Fan, S. C. *Spline finite strip in structural analysis*. PhD thesis, 1982.