Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade

para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos

Maiores de 23 Anos - 2016

Prova escrita de conhecimentos específicos
de Matemática

Instruções gerais

1. A prova é constituída por 2 grupos de questões.

2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;

3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;

4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;

5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizadas.

6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);

7. Na última página da prova encontra cotação de cada questão.

Leiria, 4 de junho de 2016

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2016

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **8 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 7**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 8**.

Grupo I

- As **oito questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(4) = 0$ e que f é uma função par.

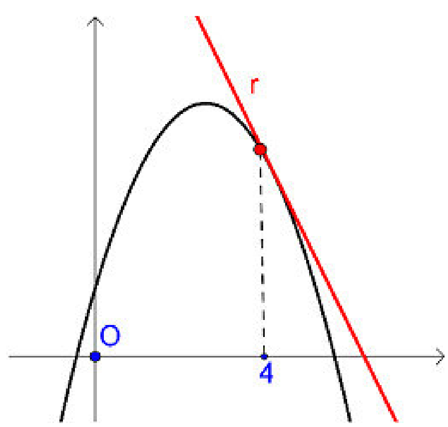
   Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x+2)$.

   Qual dos seguintes pode ser o conjunto dos zeros de g?

   (A) $\{2\}$. **(B)** $\{0, 2\}$. **(C)** $\{2, 6\}$. **(D)** $\{-6, 2\}$.

2. Na figura estão representados:

   - parte do gráfico de uma função h diferenciável em $\mathbb{R}$;
   - uma reta r tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 4.



   O valor de $h'(4)$, derivada da função h no ponto de abcissa 4, pode ser igual a:

   (A) -2. **(B)** 0. **(C)** 2. **(D)** $\dfrac{1}{h(4)}$.

3. O polinómio x^2+bx+c, onde b e c são constantes reais, é divisível por $x+1$. Além disso, ao ser dividido por $x-1$ e por $x-3$, é obtido o mesmo resto. Os valores das constantes reais b e c são:

(**A**) $b=4$ e $c=-5$. (**B**) $b=4$ e $c=5$.

(**C**) $b=-4$ e $c=-5$. (**D**) $b=-4$ e $c=5$.

4. Um projétil é lançado verticalmente de baixo para cima.

Sabendo que a sua altitude h (em metro), t segundos após ter sido lançado, é modelada pela expressão $h\,(t) = -6t^2+130t$, qual a velocidade (em metro por segundo) do projétil, dois segundos após o lançamento?

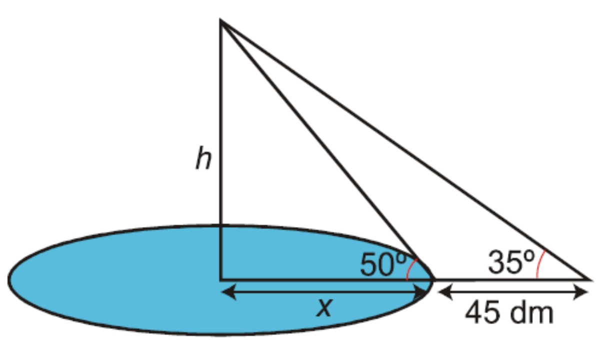
(**A**) 130. (**B**) 106. (**C**) 118. (**D**) 94.

5. O valor de $\lim_{x\to 2}\dfrac{2x\sqrt{x}-2\sqrt{2}x}{x-2}$ é:

(**A**) $-\sqrt{2}$. (**B**) $\sqrt{2}$. (**C**) $2\sqrt{2}$. (**D**) $3\sqrt{2}$.

6. O sr. João está à beira de um lago circular e deseja medir a altura de uma estátua que foi colocada no seu centro. Para o efeito, mede o ângulo que o seu ponto de visão faz com o ponto mais alto da estátua e obtém 50°. Retrocede 45 dm e volta a medir novamente o ângulo que o seu ponto de visão faz com o ponto mais alto da estátua e obtém 35°.

Qual a altura aproximada da estátua?



(**A**) 2 m. (**B**) 4 m. (**C**) 6 m. (**D**) 8 m.

7. Considere a função f, real de variável real, definida por $f(x) = a + ax - \dfrac{x}{b-x}$, onde a e b são constantes reais. Os valores das constantes reais a e b para os quais a reta de equação $y = x + 2$ é a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0 são:

(**A**) $a = 1$ e $b = 1$.

(**B**) $a = 2$ e $b = 1$.

(**C**) $a = 2$ e $b = 3$.

(**D**) $a = 3$ e $b = 2$.

8. Um relógio de parede dá sinais sonoros a cada hora, a cada meia hora e a cada quarto de hora. A cada hora, o número de sinais sonoros é igual à hora indicada no relógio de parede, isto é, por exemplo, às quatro horas dá quatro sinais sonoros. A cada meia hora e a cada quarto de hora, o relógio de parede dá um único sinal sonoro.

   Quantos sinais sonoros são dados pelo relógio de parede ao fim de um dia?

(**A**) 228.

(**B**) 102.

(**C**) 114.

(**D**) 90.

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. O resto da divisão de um polinómio $p(x)$ por $x+1$ é 7 e o resto da divisão de $p(x)$ por $x-2$ é 3.

   Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $(x+1)(x-2)$.

2. Considere as funções reais de variável real:

   - a função polinomial f definida por $f(x) = x^3 - 3x + 2$;
   - a função polinomial g definida por $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$;

- a função h definida por $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$;
- a função racional r definida por $r(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(a) Determine a decomposição em fatores do 1.^{o} grau da função f e da função g.

(b) Indique o domínio da função h e o domínio da função r.

(c) Determine a decomposição da função r em frações racionais.

(d) Estude a monotonia (sentido de variação) da função r.

(e) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função h no ponto de coordenadas $(-1, h(-1))$.

3. Considere a função f, real de variável real, definida por,

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & se \quad x \leq -1 \\ x^2 & se \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 3x + 2 & se \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

(a) Apresente um esboço do gráfico da função f e indique o seu contradomínio.

(b) Indique um intervalo onde a função f seja estritamente crescente e um intervalo onde a função f não seja injetiva.

(c) Estude a continuidade da função f no ponto de abcissa 1.

(d) A função f é diferenciável no ponto de abcissa 1? Justifique.

(e) Usando a definição de derivada, determine $f'(2)$.

(f) Indique uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

4. A perda de propagação de sinal (L), em decibel (dB), entre a antena transmissora e a antena recetora, em espaço livre de obstáculos, é modelada por,

$$L = 32.4 + 20\log_{10}(f) + 10\log_{10}(d)$$

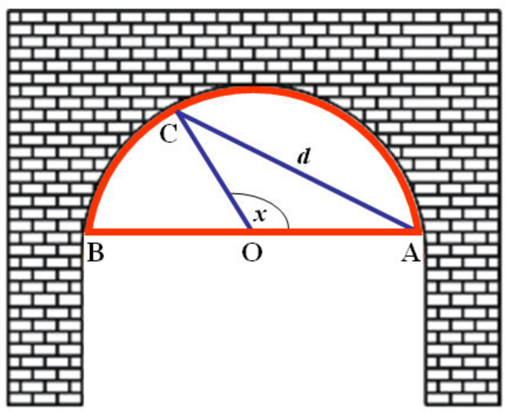
onde f é a frequência de transmissão em mega-hertz (MHz), d é a distância entre as antenas de transmissão e receção em quilómetros (km) e $\log_{10}$ representa a função logaritmo de base 10.

(a) Determine um valor aproximado da perda de propagação de um sinal, sabendo que é um sinal de radiofrequência de 600 MHz, enviado de uma estação-base para uma antena recetora que está a 20 km de distância, em espaço livre de obstáculos.

(b) Determine um valor aproximado da distância a que se encontra uma antena recetora, considerando que em espaço livre de obstáculos, a frequência de transmissão é de 750 MHz e que a perda de sinal é de 120 dB.

(c) Indique o que acontece à perda de propagação de um sinal de transmissão em frequência constante, quando, em espaço livre de obstáculos, se aumenta a distância entre as duas antenas, multiplicando a distância pelo fator 10^k.

5. A figura ilustra a entrada de um túnel, onde um ponto C se desloca sobre a semicircunferência de diâmetro $[AB]$ e centro O.



Considere que o comprimento do segmento $[AC]$, em função da amplitude x do ângulo AOC é dado por,

$$d\,(x) = 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

onde sin representa a função seno e $x \in [0, \pi]$.

(a) Indique o valor de x para o qual $d\,(x) = \overline{AB}$ e justifique que a semicircunferência tem raio 3.

(b) Justifique que quando $x \in \,]0, \pi[$, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.

(c) Mostre que $\overline{BC} = 6 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, onde cos representa a função cosseno.

(d) Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é $9 \sin\,(x)$, onde sin representa a função seno.

(e) Determine o valor de $x \in \,]0, \pi[$ para o qual o perímetro do triângulo $[ABC]$ é máximo e indique o valor do perímetro.

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Probabilidades

$\mu = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \cdot Altura$

Polígono Regular: $Semiperímetro \cdot Apótema$

Setor Circular: $\frac{\alpha \cdot r^2}{2}$ (α − amplitude em radianos do ângulo ao centro, r − raio)

COTAÇÕES

Grupo I		**40**
Cada resposta certa	5	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0	
Grupo II		**160**
1.	8	
2.	42	
(a)	6	
(b)	6	
(c)	10	
(d)	10	
(e)	10	
3.	45	
(a)	12	
(b)	4	
(c)	10	
(d)	4	
(e)	9	
(f)	6	
4.	20	
(a)	5	
(b)	7	
(c)	8	
5.	45	
(a)	4	
(b)	4	
(c)	12	
(d)	10	
(e)	15	
Total		**200**