



**Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade
para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores
de 23 Anos - 2021**

**Prova escrita de conhecimentos específicos
de MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS**

Instruções gerais

1. A prova é constituída por dois grupos de questões obrigatórias.
2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;
3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;
4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;
5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizada.
6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);
7. Na última página do teste encontra as cotações de cada questão.

Leiria, 19 de junho de 2021

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a
Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos
Superiores do Instituto Politécnico de Leiria
dos Maiores de 23 Anos – 2021

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA
APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde.**
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de “**esferográfica lápis**” e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **11 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** nas **páginas 9 e 10**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 11**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere que durante um processo eleitoral concorreram duas listas e que:

- a lista A obteve 3400 votos;
- a lista B obteve 1900 votos;
- o número de mandatos é 5.

Qual é a distribuição de mandatos por cada uma das listas usando o método d'Hondt?

(A) $A - B - A - A - B$.

(B) $A - A - B - A - B$.

(C) $A - A - B - B - A$.

(D) $A - B - A - B - A$.

2. Considere em \mathbb{R} , a equação polinomial, definida por, $(x + 1)^2 - 2x(3 - x) = 2x^2 - 3$.

Qual é o seu conjunto solução?

(A) $\{-2, 0\}$.

(B) $\{0, 2\}$.

(C) $\{2\}$.

(D) $\{-2\}$.

3. Considere em \mathbb{R} , os polinómios P e Q , definidos por,

$$P(x) = (x + m)^2 + n(x - 1)$$

e

$$Q(x) = x^2 - 1$$

onde m e n são constantes reais.

Quais os valores de m e de n de modo a que os polinómios P e Q sejam iguais?

(A) $m = 1 \wedge n = 2$.

(B) $m = -1 \wedge n = 2$.

(C) $m = 1 \wedge n = -2$.

(D) $m = -1 \wedge n = -2$.

4. Considere uma sequência em que o primeiro elemento é 244 e em que a lei de transformação de cada um dos elementos seguintes é: *adicionar duas unidades ao elemento anterior e depois dividir o resultado por três unidades*.

Qual é o terceiro elemento da sequência?

- (A) 82. (B) 28. (C) 10. (D) 4.

5. Considere a tabela seguinte com a distribuição das alturas de 25 estudantes do ensino básico de uma escola e onde $k > 160$.

Altura (em centímetro)	150	154	156	160	k
Número de Estudantes	6	3	2	10	4

Sabe-se que a média das alturas destes 25 estudantes é de 158 centímetros.

Qual é o valor de k ?

- (A) 163. (B) 165. (C) 168. (D) 169.

6. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

Sabe-se que A e B são dois acontecimentos incompatíveis, ambos com probabilidade não nula.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

- (A) 0. (B) 1. (C) $P(A)$. (D) $P(B)$.

7. Considere que um médico observou que 40 % dos seus pacientes são fumadores, dos quais 75 % são do género masculino.

O médico observou ainda que 60 % dos pacientes que não são fumadores são do género feminino.

Qual é a probabilidade de um dos pacientes ser do género feminino?

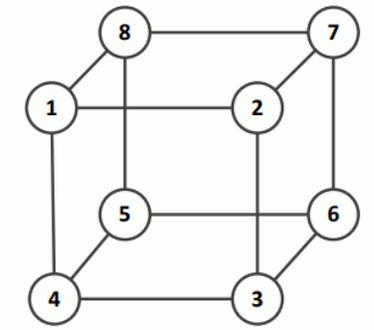
- (A) 0,56. (B) 0,45. (C) 0,46. (D) 0,34.

8. Considere um grafo com 5 vértices e que o grau de cada um dos vértices é 4, 3, 2, 2 e 1.

Qual é o número de arestas do grafo?

- (A) 7. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

9. Considere o grafo ilustrado na figura.



Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) É um grafo que contém um circuito hamiltoniano.
- (B) É um grafo que não contém um circuito hamiltoniano.
- (C) É um grafo que contém um circuito euleriano.
- (D) Nenhuma das afirmações anteriores está correta.

10. Considere que o número de bactérias dentro de uma cultura em laboratório é aproximado pelo modelo populacional P , com arredondamento às unidades, definido por,

$$P(t) = \frac{770}{1 + 13e^{-0,08t}}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

onde t representa o tempo em minutos e e designa o número de Neper.

Qual é o aumento do número de bactérias da cultura ao fim de três quartos de hora, relativamente ao instante inicial?

- (A) 102.
- (B) 298.
- (C) 513.
- (D) 641.

Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** em valores aproximados, realize arredondamentos com **4 casas decimais**.

1. O cientista francês Jaques Charles observou que os gases se dilatam quando aquecidos e se contraem quando arrefecidos. A função V , real de variável real, definida por,

$$V(t) = \frac{5}{3}t + 455$$

relaciona o volume V , em centímetro cúbico (cm^3) de um gás e a sua temperatura t , em grau Celsius ($^{\circ}\text{C}$), a pressão constante.

- (a) Determine o volume de um gás a 33°C .
- (b) Sabendo que um determinado gás tem um volume de 500 cm^3 , determine a temperatura a que foi aquecido.

2. Nas eleições para a direção de uma organização apresentaram-se 3 listas a concurso: a lista A , a lista B e a lista C .

Cada eleitor, em vez de votar numa única lista, deve ordenar por ordem de preferência as 3 listas.

O método escolhido para apurar a lista vencedora foi o preferencial, de acordo com os critérios e etapas:

- por cada escolha da lista, a primeira preferência recebe três pontos, a segunda preferência recebe dois pontos e a terceira preferência recebe um ponto;
- realizado o apuramento da pontuação obtida por cada lista, será vencedora a lista que obtiver a pontuação total mais elevada.

Fechadas as mesas de voto, a tabela apresenta a contagem dos votos.

Preferências			
1. ^a	A	C	B
2. ^a	B	B	A
3. ^a	C	A	C
Total	40	45	38

- (a) Indique, justificando, qual é a lista vencedora?

Observação: apresente os cálculos necessários para justificar que essa lista é a vencedora.

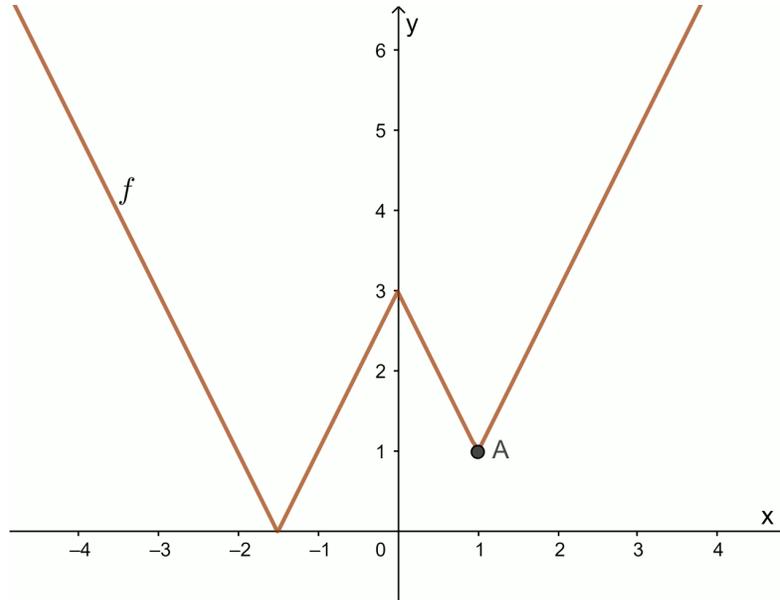
- (b) Considere que uma das listas era excluída.

Realize a simulação com cada uma das 3 listas a ser excluída, identificando a lista vencedora em cada um dos casos, utilizando o método maioritário, em que só a primeira preferência é tida em conta e vale um ponto.

- (c) Da comparação dos resultados dois a dois, a lista B alega que deveria ser a lista vencedora no global.

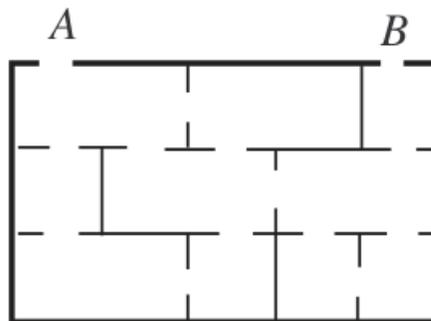
Justifique que esta lista está em condições de ser considerada vencedora, tendo em conta os resultados obtidos.

3. A figura apresenta o gráfico da função f , real de variável real.



- (a) Qual é o domínio e o contradomínio da função f ?
- (b) 6 é imagem de algum número real, pela função f ? Justifique.
- (c) O ponto A é a interseção das retas de equações $y = 3 - 2x$ e $y = 2x - 1$.
Determine as coordenadas do ponto A.
- (d) Apresente na forma reduzida o polinómio $(3 - 2x)(2x - 1)$.
- (e) O gráfico da função $y = (3 - 2x)(2x - 1)$ intersesta o eixo OY ? Justifique.

4. Um pavilhão de exposições tem uma parte dividida, com diversos expositores, segundo o esquema da figura, onde A é a entrada e B é a saída.



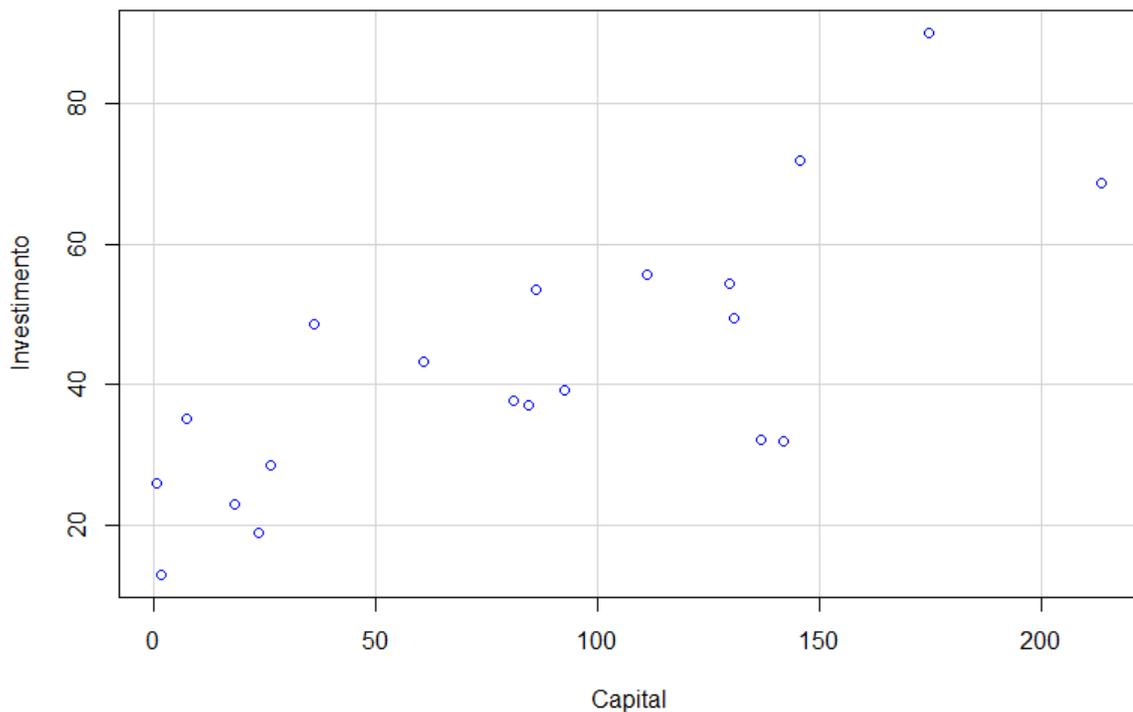
É possível, para um visitante, fazer um percurso em que entre em A , passe por todas as portas, uma e uma única vez e saia em B ? Resolva o problema recorrendo ao que aprendeu sobre grafos.

5. Considere que a tabela apresenta os valores do capital investido pela empresa (Investimento) e o capital próprio da empresa (em milhões de dólares) relativos a uma amostra de 20 empresas de uma determinada região.

Investimento	12,93	25,90	35,05	22,89	18,84	28,57	48,51	43,34	37,02	37,81
Capital	1,8	0,8	7,4	18,1	23,5	26,5	36,2	60,8	84,4	81,2
Investimento	39,27	53,46	55,56	49,56	32,04	32,24	54,38	71,78	90,08	68,6
Capital	92,4	86,0	111,1	130,6	141,8	136,7	129,7	145,5	174,8	213,5

- Determine estimativas para a média e para o desvio padrão desse investimento, das empresas daquela região.
- Determine um intervalo de 95 % de confiança para a média de investimento das empresas daquela região, admitindo que o investimento tem uma distribuição normal.
- Determine uma estimativa para a proporção de empresas com pelo menos 100 milhões de dólares de capital próprio.
- O gráfico ilustra a representação dos pares de pontos (Investimento, Capital).

Observando o gráfico parece-lhe haver uma associação entre o Capital da empresa e o montante investido? Que tipo de associação? Justifique.



- Determine o coeficiente de correlação de Pearson entre as duas variáveis e interprete o seu significado.

6. Uma empresa fabrica estores de três tipos: A , B e C .

Sabe-se que a sua produção é 50 % de estores do tipo A , 30 % de estores do tipo B e 20 % de estores do tipo C .

Os estores podem ser elétricos ou manuais.

Sabe-se também que 10 % dos estores produzidos do tipo A são elétricos, que 20 % dos estores produzidos do tipo B são elétricos e que os estores do tipo C são todos elétricos.

- (a) Dos estores produzidos pela empresa, qual é a percentagem de estores elétricos?
- (b) Dos estores elétricos produzidos pela empresa, qual é a percentagem de estores do tipo B ?

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Probabilidades

Consideremos uma experiência aleatória e_h , com universo Ω e os acontecimentos A , B , A_1, A_2, \dots, A_n e E tais que: $P(E) \neq 0$, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j = 1, 2, \dots, n : i \neq j$.

Então:

$$\diamond P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\diamond P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$\diamond P(E) = P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + \dots + P(E \cap A_n)$$

$$\diamond P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i) P(A_i)}{P(E|A_1) P(A_1) + P(E|A_2) P(A_2) + \dots + P(E|A_n) P(A_n)}$$

Estatística Descritiva

Modalidades	Frequência Absoluta Ordinária	Frequência Relativa Ordinária	Frequência Absoluta Acumulada	Frequência Relativa Acumulada
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
x_2	n_2	f_2	N_2	F_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	n_i	f_i	$N_i = \sum_{j=1}^i n_j$	$F_i = \sum_{j=1}^i f_j$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_p	n_p	f_p	$N_p = n$	$F_p = 1$

$$\diamond \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i x_i}{n} = \sum_{i=1}^p f_i x_i$$

$$\diamond s = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \frac{n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left[\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30.

$$\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

n – dimensão da amostra

\bar{x} – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p admitindo que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30.

$$\left[\hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

n – dimensão da amostra

\hat{p} – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais.

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

Grupo I	70
Cada resposta certa	7
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0
 Grupo II	 130
1.	20
(a)	10
(b)	10
2.	
(a)	6
(b)	10
(c)	4
3.	25
(a)	3
(b)	2
(c)	10
(d)	5
(e)	5
4.	15
5.	30
(a)	5
(b)	10
(c)	5
(d)	5
(e)	5
6.	20
(a)	10
(b)	10
 Total	 200