Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade

para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores

de 23 Anos - 2021

Prova escrita de conhecimentos específicos

de MATEMÁTICA

Instruções gerais

1. A prova é constituída por dois grupos de questões obrigatórias.

2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;

3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;

4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;

5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizada.

6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);

7. Na última página do teste encontra as cotações de cada questão.

Leiria, 19 de junho de 2021

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2021

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **8 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 7**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 8**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere os polinómios p e q definidos por,

$$p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 18x - 19 \qquad \text{e} \qquad q(x) = x^2 - 3x + 4.$$

Qual é o polinómio r que define o resto da divisão do polinómio p pelo polinómio q?

(A) $r(x) = -x - 1$. **(B)** $r(x) = -x + 1$.

(C) $r(x) = x - 1$. **(D)** $r(x) = x + 1$.

2. Considere a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por, $f(x) = 3^{10x+1} - 27$.

Qual é o conjunto de solução da inequação ($\log_3$ designa o logaritmo na base 3),

$$\log_3 [f(x)] \leq 2 + \log_3 (6)\,?$$

(A) $x \in]0,0;0,3]$. **(B)** $x \in]0,2;0,3]$.

(C) $x \in [0,2;0,3]$. **(D)** $x \in]0,0;0,2]$.

3. Considere que $\cos(\alpha) = -\dfrac{3}{5}$ e $\alpha \in]180^o, 360^o[$ (cos designa o cosseno).

Qual é o valor da expressão definida por (sin designa o seno e tan designa a tangente),

$$2\sin(\alpha) + 3\tan(\alpha)\,?$$

(A) $-\dfrac{12}{5}$. **(B)** $\dfrac{5}{12}$. **(C)** $\dfrac{12}{5}$. **(D)** $-\dfrac{5}{12}$.

4. Considere a função g, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por (sin designa o seno e cos designa o cosseno),

$$g(x) = \sin(x) + \cos(x).$$

Qual é o subintervalo do intervalo $[0; 2\pi]$ no qual a função g tem a concavidade voltada para cima?

(**A**) $x \in \left]0; \frac{3\pi}{4}\right[$. (**B**) $x \in \left]\frac{3\pi}{4}; \pi\right[$. (**C**) $x \in \left]\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right[$. (**D**) $x \in]\pi; 2\pi[$.

5. Considere a função h, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa 2 é a reta definida por, $y = 3x + 1$.

Qual é o valor do limite definido por,

$$\lim_{x \to 2} \frac{[h(x)]^2 - [h(2)]^2}{x - 2}?$$

(**A**) -42. (**B**) 42. (**C**) 43. (**D**) 44.

6. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência,

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Qual é a soma dos 80 termos consecutivos da sucessão (u_n), a partir do quinto termo inclusive?

(**A**) 10044. (**B**) 10042. (**C**) 10041. (**D**) 10040.

7. Considere que os ângulos internos de um triângulo estão em progressão aritmética e que o maior ângulo mede 105^o.

Quanto mede o menor ângulo?

Observação: recorde que a soma dos ângulos internos de um triângulo é de 180^o.

(**A**) 15^o. (**B**) 30^o. (**C**) 60^o. (**D**) 75^o.

8. Considere um polígono regular com n lados ($n \geq 3$).

Qual é o número de diagonais do polígono?

Observação: recorde que a diagonal de um polígono regular é o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos.

(**A**) $\dfrac{n^2-n}{2}$. (**B**) $\dfrac{n^2-2n}{2}$. (**C**) $\dfrac{n^2-3n}{2}$. (**D**) n^2-2n.

9. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

Sabe-se que A e B são dois acontecimentos incompatíveis, ambos com probabilidade não nula.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(**A**) 0. (**B**) 1. (**C**) $P(A)$. (**D**) $P(B)$.

10. Considere que um médico observou que 40 % dos seus pacientes são fumadores, dos quais 75 % são do género masculino.

O médico observou ainda que 60 % dos pacientes que não são fumadores são do género feminino.

Qual é a probabilidade de um dos pacientes ser do género feminino?

(**A**) $0,56$. (**B**) $0,45$. (**C**) $0,46$. (**D**) $0,34$.

Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere a função f, real de variável real, definida por (e designa o número de Neper),

$$f(x) = x - 1 + e^{-x/2}.$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

(a) Determine a derivada da função f.

(b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

(c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f em $x = 2$.

(d) Determine o valor do limite, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

2. Considere a progressão geométrica (u_n), de termos positivos.

   Sabe-se que $u_3 = 2\sqrt{2}$ e $u_5 = 4\sqrt{2}$.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Determine o termo u_1.

   (b) Determine uma expressão do termo geral da progressão.

3. Uma empresa fabrica estores de três tipos: A, B e C.

   Sabe-se que a sua produção é 50 % de estores do tipo A, 30 % de estores do tipo B e 20 % de estores do tipo C.

   Os estores podem ser elétricos ou manuais.

   Sabe-se também que 10 % dos estores produzidos do tipo A são elétricos, que 20 % dos estores produzidos do tipo B são elétricos e que os estores do tipo C são todos elétricos.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) Dos estores produzidos pela empresa, qual é a percentagem de estores elétricos?

   (b) Dos estores elétricos produzidos pela empresa, qual é a percentagem de estores do tipo B?

4. Dos 10 exercícios propostos por um professor de matemática, os estudantes têm que resolver 5.

   Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

   (a) De quantas maneiras o podem fazer?

   (b) Considerando que dos 10 exercícios há 3 que os estudantes não fazem por não saber, qual a probabilidade de, numa escolha ao acaso, nas 5 perguntas estar um daqueles três exercícios?

5. Considere as funções reais de variável real:

- a função polinomial f, definida por, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$;
- a função polinomial g, definida por, $g(x) = 2x^4 + ax^3 - 8x^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes reais.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

(a) Determine a decomposição em fatores do 1.º grau da função polinomial f.

(b) Determine o valor de a, b e c de modo a que a função polinomial g seja divisível pela função polinomial f.

(c) Determine o conjunto solução da condição, $g(x) \leq 0$.

6. A figura ilustra uma circunferência de centro em O e de raio 10.

No interior da circunferência encontram-se os elementos:

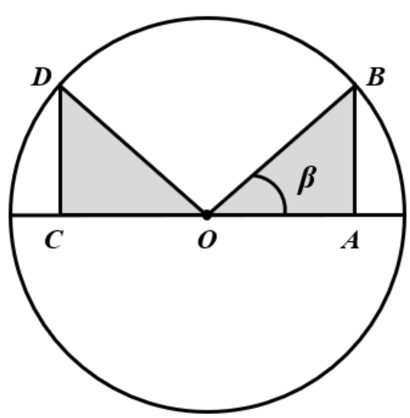
- o segmento $[CA]$ está contido no diâmetro da circunferência;
- os segmentos $[CD]$ e $[AB]$ são paralelos e perpendiculares ao segmento $[CA]$;
- os triângulos de vértices $[OCD]$ e $[OAB]$ são geometricamente iguais;
- o ângulo $[BOA]$, de amplitude β é tal que $\beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens.

(a) Mostre que a soma das áreas dos triângulos $[OCD]$ e $[OAB]$ é dada, em função de β, por (sin designa o seno), $\acute{A}rea\,(\beta) = 50\sin(2\beta)$.

(b) Determine $\acute{A}rea\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

(c) Determine o valor de β para o qual a soma das áreas dos dois triângulos é máxima.



FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \cdot Altura$

Probabilidades

$\mu = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Limites Notáveis

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{u_n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

COTAÇÕES

Grupo I		**70**
Cada resposta certa	7	
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0	
Grupo II		**130**
1.	25	
(a)	6	
(b)	7	
(c)	7	
(d)	5	
2.	15	
(a)	7	
(b)	8	
3.	20	
(a)	10	
(b)	10	
4.	15	
(a)	5	
(b)	10	
5.	25	
(a)	6	
(b)	10	
(c)	9	
6.	30	
(a)	12	
(b)	6	
(c)	12	
Total		**200**