Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade

para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria

dos Maiores de 23 Anos - 2022

Prova Escrita de conhecimentos específicos de

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

Instruções Gerais:

1. A prova é constituída por dois grupos de questões obrigatórias.

2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos.

3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento.

4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha.

5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizadas.

6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte).

7. As cotações de cada questão da prova encontram-se na página 10.

Leiria, 04 de junho de 2022

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2022

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **10 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** nas **páginas 8** e **9**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 10**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere em $\mathbb{R}$ a equação polinomial definida por, $2x^2 + 3x = 3\,(1 - x) + 5$.

   Qual é o seu conjunto solução?

   (**A**) $\{-4, 2\}$. (**B**) $\{-1, 4\}$. (**C**) $\{-4, 1\}$. (**D**) $\{-2, 4\}$.

2. Considere em $\mathbb{R}$ os polinómios P e Q definidos por,

   $$P\,(x) = x^2 + 2mx + n \qquad \text{e} \qquad Q\,(x) = (x - 3)^2 - 2\,(x + 3)$$

   onde m e n são constantes reais.

   Quais os valores de m e de n de modo a que os polinómios P e Q sejam iguais?

   (**A**) $m = -6 \wedge n = 9$. (**B**) $m = -4 \wedge n = 3$.

   (**C**) $m = -6 \wedge n = 3$. (**D**) $m = -4 \wedge n = -3$.

3. Considere a função f, real de variável real, definida por, $f\,(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 + 3x}$.

   Qual é o domínio da função f?

   (**A**) $D_f = \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$. (**B**) $D_f = \mathbb{R} \diagdown \{-3, 0\}$.

   (**C**) $D_f = [-3, +\infty[$. (**D**) $D_f = \mathbb{R} \diagdown \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\}$.

4. Considere o sistema de duas equações lineares, com incógnitas x e y, definido por,

$$\begin{cases} ax - y = 2 \\ x + y = -2 \end{cases}$$

e onde a é um número real diferente de -1.

Qual é a solução do sistema de duas equações lineares?

(**A**) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$. (**B**) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$. (**C**) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$. (**D**) $\begin{cases} x = 1 \\ y = a + 2 \end{cases}$.

5. Considere os pontos A e B do plano com as coordenadas $(1, 2)$ e $(2, 6)$, respetivamente.

Qual é a equação da reta que passa pelos pontos A e B?

(**A**) $y = 6 + 4(x - 2)$. (**B**) $y = -2x + 4$.

(**C**) $y = 4 + 2(x - 2)$. (**D**) $y = 4x - 6$.

6. Considere que a média das idades de sete estudantes de um grupo de trabalho é de 20 anos e que esse grupo de trabalho recebeu um novo estudante com a idade de 28 anos.

Qual é a média das idades do grupo de trabalho com oito estudantes?

(**A**) 21. (**B**) 22. (**C**) 23. (**D**) 24.

7. Considere a tabela seguinte com as frequências acumuladas absolutas da idade dos estudantes de uma turma de Matemática.

Idade	17	18	19	20	21
Frequência Acumulada Absoluta	3	16	21	23	25

Qual é a percentagem de estudantes dessa turma de Matemática com 19 anos?

(**A**) 5 %. (**B**) 20 %. (**C**) 21 %. (**D**) 23 %.

8. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

Sabe-se que $P(A) = 0,30$, $P(A \cup B) = 0,26$ e $P(A \cap B) = 0,24$.

Qual é o valor da probabilidade de $P(B)$?

(**A**) $0,20$. (**B**) $0,02$. (**C**) $0,06$. (**D**) $0,50$.

9. Considere que o coeficiente de correlação entre a duas variáveis X e Y é de $-0,857$.

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

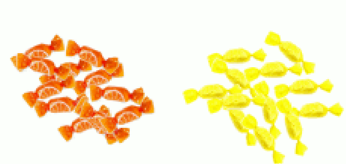
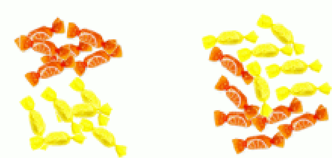
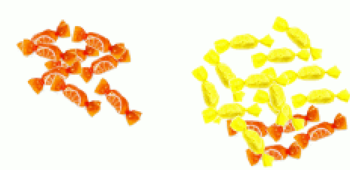
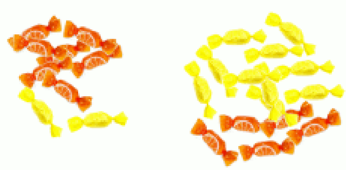
   (**A**) A reta de regressão linear que exprime Y em função de X tem declive positivo.

   (**B**) A variável Y tem tendência a decrescer quando a variável X tem tendência a crescer.

   (**C**) O modelo de regressão linear não deve ser utilizado.

   (**D**) A reta de regressão linear que exprime Y em função de X intersecta o eixo dos YY em $-0,857$.

10. Considere que o Pedro e o Afonso pretendem dividir entre si 24 rebuçados: 12 de laranja (La) e 12 de limão (Li). O Pedro prefere três vezes mais os rebuçados de laranja do que os rebuçados de limão e o Afonso prefere duas vezes mais os rebuçados de limão do que os rebuçados de laranja. Considere que a divisão dos rebuçados é feita pelo Pedro e que a figura apresenta diferentes alterativas da divisão dos 24 rebuçados.

		
(1) 12La /12Li	(2) 6La+6Li / 6La+6Li	(3) 8La / 12 Li + 4La
		
(4) 7La + 2Li /8 Li+5La		(5) 8La +3Li / 9 Li + 5La

   Quais as divisões justas, de acordo com as preferências do Pedro?

   (**A**) (1) e (2).

   (**B**) (1), (3) e (5).

   (**C**) (4) e (5).

   (**D**) Nenhuma das divisões.

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** em valores aproximados, realize arredondamentos com **4 casas decimais**.

1. Uma determinada população P_n cresce com o número n de anos, a partir do momento inicial $(n = 0)$ e segundo o modelo definido por,

$$P_n(n) = 5 \times (1,12)^n .$$

   (a) Determine o número de indivíduos da população ao vigésimo ano.

   (b) Determine ao fim de quantos anos a população atinge 1100 indivíduos.

2. Considere em $\mathbb{R}$ os polinómios P e Q definidos por,

$$P(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 6 \qquad \text{e} \qquad Q(x) = -x^2 + 3x - 2.$$

   (a) Efetue e apresente na forma reduzida as seguintes operações:

      i. $P(x) + Q(x)$.

      ii. $P(x) \times Q(x)$.

   (b) Decomponha o polinómio Q em fatores do 1.^{o} grau.

   (c) Determine o conjunto solução da equação $Q(x) = -2$.

3. Suponha que existem dois candidatos, A e B, à eleição para presidente de um clube e que nessa eleição votaram 700 sócios. Para apurar o candidato vencedor foi usado o sistema maioritário.

   (a) Determine qual é a diferença mínima de votos entre os candidatos para que o candidato A possa ser considerado o vencedor.

   (b) Se a diferença é mínima, determine qual é a percentagem de votos de cada candidato sabendo que o candidato A é o vencedor.

   (c) Numa eleição com apenas dois candidatos, o vencedor terá sempre maioria absoluta? Justifique.

   (d) Considerando que o número de candidatos aumentava para quatro, determine o número de votos que cada candidato precisava de ter de modo que a que o candidato vencedor tivesse o menor número de votos possível.

4. Considere que a tabela apresenta os valores do tempo, em horas, que 80 pacientes hospitalizados dormiram durante a administração de certo anestésico.

Tempo (em horas)	$[0,4[$	$[4,8[$	$[8,12[$	$[12,16[$	$[16,20]$
Número de Pacientes	8	15	24	20	13

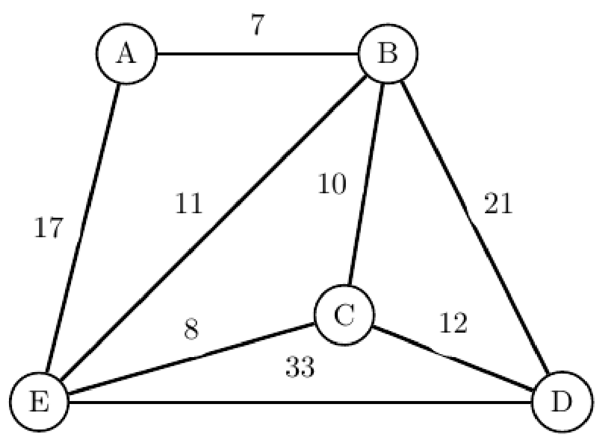
(a) Determine o valor aproximado da mediana.

(b) Determine o percentual de pacientes que dormiram menos de 12 horas.

(c) Determine a média aritmética e o desvio padrão dos dados da tabela.

(d) Determine um intervalo de 98 % de confiança para a média do número de horas dormidas pelos pacientes.

5. A figura apresenta um grafo onde cada vértice representa uma morada numa determinada cidade, as arestas representam as estradas que ligam essas moradas e o número sobre cada aresta representa a distância, em quilómetros, entre cada uma das moradas.



(a) Suponha que uma empresa de distribuição de encomendas deve entregar uma encomenda em cada uma das moradas. Determine o caminho mais curto entre as cinco moradas:

i. usando o método dos mínimos sucessivos.

ii. usando o método da ordenação dos pesos das arestas.

(b) Imagine que a equipa de manutenção de estradas pretendem inspecionar todas as estradas representadas. É possível partir da morada A e acabar em A passando uma única vez por cada uma das estradas? Justifique utilizando a teoria dos grafos.

(c) Imagine que uma empresa de telecomunicações pretende ligar quatro moradas através de cabo de fibra ótica e que para o fazer só pode utilizar as ligações indicadas, sendo o comprimento de cabo o número que aparece sobre as arestas. Utilize o algoritmo de Kruskal para determinar as ligações a efetuar de modo a gastar a menor quantidade de cabo possível.

6. Uma escola oferece três cursos optativos de idiomas: espanhol, francês e alemão. Os cursos são abertos a qualquer um dos 100 estudantes matriculados. Há 28 estudantes no curso de espanhol, 26 estudantes no curso de francês e 16 estudantes no curso de alemão. Além disso, 12 estudantes frequentam os cursos de espanhol e francês, 4 estudantes frequentam os cursos de espanhol e alemão, 6 estudantes frequentam os cursos de francês e alemão, e 2 estudantes frequentam os três cursos.

   (a) Se um estudante é escolhido aleatoriamente, qual é a probabilidade de que não frequente qualquer dos cursos?

   (b) Se um estudante é escolhido aleatoriamente, qual é a probabilidade de que frequente um e exatamente um dos cursos?

   (c) Se dois estudantes são escolhidos aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelo menos um deles frequente um dos cursos?

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Probabilidades

Consideremos uma experiência aleatória e_h, com universo Ω e os acontecimentos A, B, A_1, A_2, ..., A_n e E tais que: $P(E) \neq 0$, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i, j = 1, 2, ..., n : i \neq j$.

Então:

◊ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

◊ $P(A|E) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(E)}$

◊ $P(E) = P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + ... + P(E \cap A_n)$

◊ $P(A_i|E) = \dfrac{P(E|A_i)\,P(A_i)}{P(E|A_1)\,P(A_1) + P(E|A_2)\,P(A_2) + ... + P(E|A_n)\,P(A_n)}$

Estatística Descritiva

Modalidades	Frequência Absoluta Ordinária	Frequência Relativa Ordinária	Frequência Absoluta Acumulada	Frequência Relativa Acumulada
x_1	n_1	f_1	N_1	F_1
x_2	n_2	f_2	N_2	F_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_i	f_i	$N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$	$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_p	f_p	$N_p = n$	$F_p = 1$

◊ $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p} n_i x_i}{n} = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i x_i$

◊ $s = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30.

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p admitindo que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30.

$$\left]\widehat{p} - z\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\widehat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais.

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1,645$	$1,960$	$2,576$

Grupo I	**70**
Cada resposta certa	7
Cada resposta errada, anulada ou não respondida	0

Grupo II	**130**
1.	15
(a)	5
(b)	10
2.	20
(a)	10
(b)	5
(c)	5
3.	20
(a)	5
(b)	5
(c)	5
(d)	5
4.	25
(a)	5
(b)	5
(c)	10
(d)	5
5.	30
(a)	10
(b)	10
(c)	10
6.	20
(a)	5
(b)	8
(c)	7

Total	**200**