**Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos - 2023**

# Prova escrita de conhecimentos específicos de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

**Instruções gerais**

**1.** A prova é constituída por 2 grupos de questões obrigatórias.

**2.** A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;

**3**. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;

**4.** Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;

**5.** Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizadas.

**6.** Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);

**7.** A cotação de cada questão encontra-se na última página da prova.

Leiria, 24 de junho de 2023

# Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2023

## Prova de Avaliação de MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **10 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** nas **páginas 8** e **9**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 10**.

# Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere a função $f$, real de variável real, definida por, $f(x) = x(2x-1) - 1$.

   Qual é o conjunto solução da equação $f(x) = 2$?

   (**A**) $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$. (**B**) $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$. (**C**) $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. (**D**) $\{0, 1\}$.

2. Considere em $\mathbb{R}$ os polinómios $P$ e $Q$ definidos por,

   $$P(x) = 2x^3 + ax^2 + b \quad \text{e} \quad Q(x) = x^2 - x + 1$$

   onde $a$ e $b$ são constantes reais.

   Quais os valores de $a$ e de $b$ de modo que o resto da divisão do polinómio $P$ pelo polinómio $Q$ seja o polinómio $x - 5$?

   (**A**) $a = 1 \wedge b = 2$. (**B**) $a = -1 \wedge b = 2$.

   (**C**) $a = 1 \wedge b = -2$. (**D**) $a = -1 \wedge b = -2$.

3. Considere o sistema de duas equações lineares, com incógnitas $x$ e $y$, definido por,

   $$\begin{cases} -x + 2y = k \\ x + y = -1 \end{cases}$$

   onde $k$ é uma constante real.

   Qual é o valor da constante $k$ de modo que a solução do sistema de duas equações lineares seja $x = -3 \wedge y = 2$?

   (**A**) $k = 7$. (**B**) $k = 1$. (**C**) $k = -1$. (**D**) $k = -7$.

4. Considere que a função $V$, real de variável real, definida por,

$$V(t) = 24 \times 0,86^t \qquad (t \geq 0)$$

modela o valor de um certo modelo de automóvel, onde $V$ é o valor do automóvel, em milhares de euros, e $t$ é o número de anos do automóvel.

Qual é a percentagem de desvalorização anual do automóvel?

(**A**) $14,0$ %. (**B**) $20,6$ %. (**C**) $24,0$ %. (**D**) $86,0$ %.

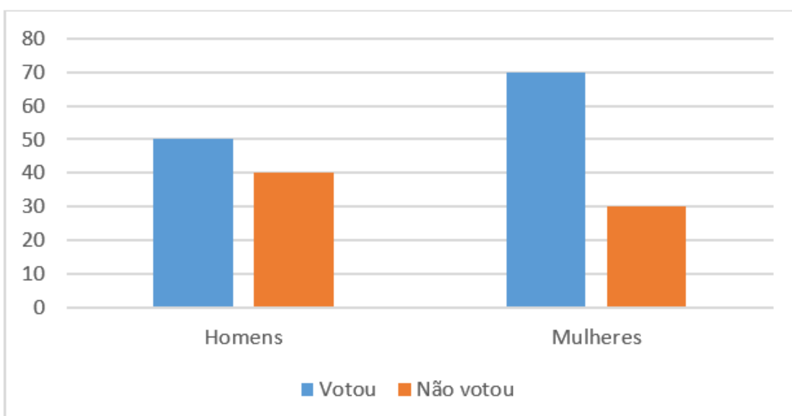
5. Considere a função $f$, real de variável real, definida por, $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-3x-4}$.

Qual é o conjunto solução da condição $f(x) \geq 0$?

(**A**) $x \in ]-\infty, -1[ \cup [2, +\infty[$. (**B**) $x \in ]-\infty, -1[ \cup [2, 4[$.

(**C**) $x \in ]-\infty, 2] \cup ]4, +\infty[$. (**D**) $x \in ]-1, 2] \cup ]4, +\infty[$.

6. Considere que foram escolhidos, ao acaso, 190 eleitores de uma freguesia tendo-se verificado se votaram ou não nas últimas eleições. No gráfico estão representados os dados referentes ao género e ao facto de terem votado nas últimas eleições.




Escolhendo, ao acaso, um destes eleitores, qual é a probabilidade de ser do género feminino, sabendo-se que votou nas últimas eleições?

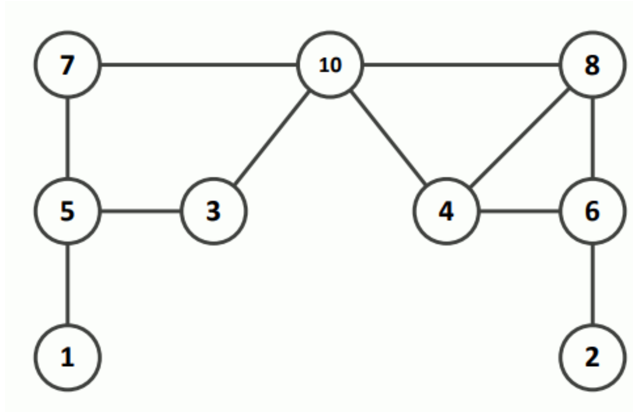
(**A**) $0,368$. (**B**) $0,583$. (**C**) $0,700$. (**D**) $0,714$.

7. Considere que numa gelataria existem oito sabores diferentes sendo cinco sabores de fruta e ainda o sabor a café, a caramelo e a chocolate.

De quantas maneiras é possível escolher três sabores diferentes para um copo se pelo menos um dos sabores for de fruta não tendo em conta a ordem de escolha dos sabores?

(**A**) 30. (**B**) 56. (**C**) 55. (**D**) 50.

8. Considere o grafo ilustrado na figura, o qual representa um conjunto de edifícios interligados por um conjunto de pontes.




Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

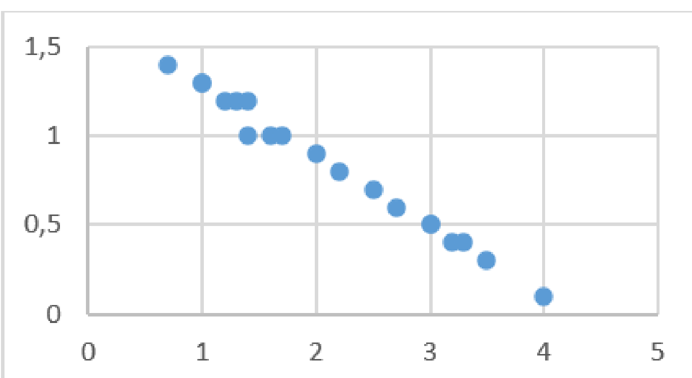
(**A**) O grafo tem um circuito de Euler.

(**B**) O grafo não tem um caminho de Euler.

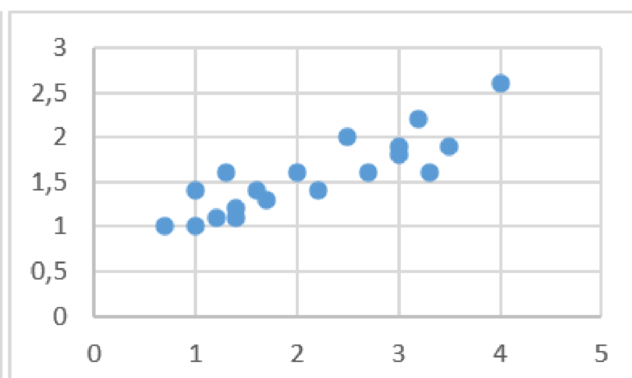
(**C**) O grafo é bipartido.

(**D**) O grafo não tem vértices de grau ímpar.

9. Considere os seguintes diagramas de dispersão que representam as variáveis $X$ e $Y$ em dois contextos diferentes (A e B).




Contexto A.




Contexto B.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(**A**) O coeficiente de correlação entre $X$ e $Y$ em A é positivo.

(**B**) A reta de regressão linear que exprime $Y$ em função de $X$ em B tem declive negativo.

(**C**) A soma dos coeficientes de correlação de A e de B é inferior a 0.

(**D**) A ordenada na origem da reta de regressão de A é inferior à de B.

10. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados $\Omega$ finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

Sabe-se que $P(A) = 0,70$, $P(A \cap B) = 0,20$ e $P(A \cup B) = 0,90$.

Qual é o valor de $P(A|B)$?

**(A)** $\frac{1}{3}$. **(B)** $\frac{1}{2}$. **(C)** $\frac{1}{4}$. **(D)** $\frac{1}{5}$.

# Grupo II

- Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.
- Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.
- **Atenção:** em valores aproximados, realize arredondamentos com **4 casas decimais**.

1. Considere em $\mathbb{R}$ os polinómios $P$ e $Q$ definidos por,

$$P(x) = \left(x^2 - 5x + 4\right)(x + 2) \qquad \text{e} \qquad Q(x) = x^2 - 1.$$

(a) Efetue e apresente na forma reduzida as seguintes operações:

i. $P(x) - (x - 3)\,Q(x)$.

ii. $(Q(x))^2 - xP(x)$.

(b) Determine o polinómio cociente e o polinómio resto de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

(c) Decomponha o polinómio $P$ em fatores do 1.$^o$ grau.

2. O António pretende mudar de empresa distribuidora de gás natural.

Para esse efeito, está a fazer um estudo e selecionou duas empresas: A e B.

A empresa A apresenta o tarifário:

- parcela fixa: $0,1336$ euros por dia;
- parcela variável em função da energia consumida: $0,0479$ euros por kWh.

A empresa B apresenta o tarifário:

- parcela fixa: isento (zero) euros por dia;
- parcela variável em função da energia consumida: $0,0586$ euros por kWh.

(a) O António analisou uma fatura de gás referente a 30 dias e verificou que o consumo energético foi 325 kWh.

De acordo os tarifários apresentados, em qual das empresas A ou B, teria sido menor o valor a pagar pelo consumo energético em gás natural indicado na fatura?

(b) O António verificou que, a partir de um certo valor de consumo energético em gás natural, em kWh, por mês, lhe seria mais favorável optar pela empresa A.

Determine esse valor. Apresente o resultado em kWh, arredondado às unidades.

Observação: na resposta considere um mês de 30 dias.

3. Num grupo de 5 homens e 6 mulheres escolheu-se uma comissão de 4 pessoas ao acaso.

(a) Represente em extensão o acontecimento: "comissão formada por 4 homens".

(b) Determine a probabilidade do acontecimento da alínea anterior.

(c) Determine a probabilidade de:

i. serem seleccionados 3 homens e 1 mulher.

ii. serem seleccionadas pelo menos 3 mulheres.

4. Numa eleição para um clube desportivo é preciso eleger quatro mandatos.

Para o processo eleitoral apresentaram-se quatro listas às quais foram atribuídas as letras A, B, C e D, respetivamente.

Após a contagem dos votos, os resultados obtidos foram:

- Lista A: 4000 votos;
- Lista B: 2500 votos;
- Lista C: 3800 votos;
- Lista D: 3200 votos.

Determine a distribuição dos mandatos:

(a) utilizando o método de Hamilton.

(b) utilizando o método de Hill-Huntington.

5. A tabela apresenta as idades e as alturas das crianças de uma turma da pré-escola.

| Idades | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 | 4 | 3 | 5 | 4 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alturas | $81,3$ | $78,7$ | $96,5$ | $119,4$ | $91,4$ | $109,2$ | $104,1$ | $114,3$ | $99,1$ | $88,9$ | $96,5$ |

(a) Determine a média aritmética, a mediana e a moda das idades das crianças

(b) Qual é a percentagem de crianças com 3 ou menos anos?

(c) Admitindo que a distribuição das alturas é normal e o desvio padrão da população é 13, determine um intervalo de 95 % de confiança para a altura média das crianças que frequenta aquela escola.

(d) Com base nesta amostra, parece-lhe que a idade e altura são variáveis associadas?

Responda utilizando o gráfico de dispersão e o coeficiente de correlação de Pearson.

(e) Determine a equação da reta dos mínimos quadrados que relaciona a altura com idade.

6. Cinco amigos: Bruno, Daniel, João, José e Leandro encontram-se habitualmente para conversar e praticar outras atividades entre as quais os jogos de damas, xadrez e dominó. O Bruno só joga xadrez, o Daniel não joga dominó, João não joga xadrez, o José joga qualquer daqueles jogos e o Leandro não joga nenhum.

(a) Represente, através de um grafo bipartido $G = (V, E)$ todas as possibilidades de um deles jogar com os restantes um destes tipos de jogo.

Defina os conjuntos $V$ e $E$. O grafo elaborado é completo? Justifique.

(b) Represente um subgrafo em que todos, menos o Leandro, joguem ao mesmo tempo.

(c) Construa um grafo que mostre quem pode jogar com quem e qual o jogo.

# FIM da Prova de Avaliação

# FORMULÁRIO

## Probabilidades

Consideremos uma experiência aleatória $e_h$, com universo $\Omega$ e os acontecimentos $A$, $B$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ e $E$ tais que: $P(E) \neq 0$, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i, j = 1, 2, ..., n : i \neq j$.

Então:

$\lozenge$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\lozenge$ $P(A|E) = \dfrac{P(A \cap E)}{P(E)}$

$\lozenge$ $P(E) = P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + ... + P(E \cap A_n)$

$\lozenge$ $P(A_i|E) = \dfrac{P(E|A_i)\,P(A_i)}{P(E|A_1)\,P(A_1) + P(E|A_2)\,P(A_2) + ... + P(E|A_n)\,P(A_n)}$

## Estatística Descritiva

| Modalidades | Frequência Absoluta Ordinária | Frequência Relativa Ordinária | Frequência Absoluta Acumulada | Frequência Relativa Acumulada |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $n_1$ | $f_1$ | $N_1$ | $F_1$ |
| $x_2$ | $n_2$ | $f_2$ | $N_2$ | $F_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$ | $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_p$ | $n_p$ | $f_p$ | $N_p = n$ | $F_p = 1$ |

$\lozenge$ $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p} n_i x_i}{n} = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i x_i$

$\lozenge$ $s = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{n} - \overline{x}^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} \dfrac{n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2}$

Intervalo de confiança para o valor médio $\mu$ de uma variável normal $X$, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

$\sigma$ – desvio padrão da variável

$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio $\mu$ de uma variável normal $X$, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30.

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

$s$ – desvio padrão amostral

$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção $p$ admitindo que a amostra tem dimensão superior ou igual a 30.

$$\left]\widehat{p} - z\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z\sqrt{\frac{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})}{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra

$\widehat{p}$ – proporção amostral

$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de $z$ para os níveis de confiança mais usuais.

| Nível de confiança | 90% | 95% | 99% |
|---|---|---|---|
| $z$ | $1,645$ | $1,960$ | $2,576$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Grupo I** | | **70** |
| Cada resposta certa | 7 | |
| Cada resposta errada, anulada ou não respondida | 0 | |
| **Grupo II** | | **130** |
| **1.** | | 20 |
| **(a) i.** | 5 | |
| **(a) ii.** | 5 | |
| **(b)** | 5 | |
| **(c)** | 5 | |
| **2.** | | 15 |
| **(a)** | 7 | |
| **(b)** | 8 | |
| **3.** | | 20 |
| **(a)** | 5 | |
| **(b)** | 5 | |
| **(c) i.** | 5 | |
| **(c) ii.** | 5 | |
| **4.** | | 20 |
| **(a)** | 10 | |
| **(b)** | 10 | |
| **5.** | | 35 |
| **(a)** | 7 | |
| **(b)** | 4 | |
| **(c)** | 8 | |
| **(d)** | 8 | |
| **(e)** | 8 | |
| **6.** | | 20 |
| **(a)** | 10 | |
| **(b)** | 4 | |
| **(c)** | 6 | |
| **Total** | | **200** |