Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade

para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores

de 23 Anos - 2025

Prova escrita de conhecimentos específicos

de Matemática

Instruções gerais

1. A prova é constituída por 2 grupos de questões obrigatórias.

2. A duração da prova é de 2 horas, estando prevista uma tolerância de 30 minutos;

3. Só pode utilizar para elaboração das suas respostas e para efetuar os rascunhos as folhas distribuídas pelo docente vigilante, salvo se previsto outro procedimento;

4. Não utilize qualquer tipo de corretor. Se necessário risque ou peça uma troca de folha;

5. Não é autorizada a utilização de quaisquer ferramentas de natureza eletrónica (telemóvel, *ipad*, computador portátil, leitores/gravadores digitais de qualquer natureza ou outros não especificados), exceto máquina de calcular para realizar cálculos e obter representações gráficas de funções, devidamente autorizadas.

6. Deverá disponibilizar ao docente que está a vigiar a sala, sempre que solicitado, um documento válido de identificação (cartão de cidadão, bilhete de identidade, carta de condução ou passaporte);

7. A seguir ao número de cada questão encontra entre parênteses a respetiva cotação.

Leiria, 24 de maio de 2025

Provas Especialmente Adequadas Destinadas a Avaliar a Capacidade para a Frequência dos Cursos Superiores do Instituto Politécnico de Leiria dos Maiores de 23 Anos – 2025

Prova de Avaliação de MATEMÁTICA

- **Identifique claramente os grupos e as questões a que responde**.
- As funções **trigonométricas** estão escritas no idioma **anglo saxónico**.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de **tinta azul** ou **preta**.
- É **interdito** o uso de "**esferográfica lápis**" e de **corretor**.
- A prova de avaliação tem **9 páginas**.
- A prova de avaliação inclui um **formulário** na **página 8**.
- As **cotações** da prova de avaliação encontram-se na **página 9**.

Grupo I

- As **dez questões** deste grupo são de **escolha múltipla**.
- Em cada questão são indicadas **quatro alternativas** de resposta das quais **só uma está correta**.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra ou se esta for ilegível, a sua **resposta** será considerada **incorreta**.
- As **respostas incorretas** terão **cotação nula**.
- **Não apresente nem cálculos nem justificações**.

1. Considere, em $\mathbb{R}$, o polinómio P definido por,

$$P(x) = (x+3)^2 - 3(x+1)^2 + 4(x-2)(x+2).$$

Qual é a expressão designatória equivalente ao polinómio P?

(**A**) $2x^2 - 2$. (**B**) $x^2 + 2$. (**C**) $2x^2 - 10$. (**D**) $3x^2 + 2$.

2. Considere, em $\mathbb{R}$, os conjuntos A e B definidos por,

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x > 0\right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-1)^2}{x^2 - 16} \geq 0\right\}.$$

Qual é o intervalo de números reais $A \cup B$?

(**A**) $]-\infty, 0] \cup \{1\} \cup]4, +\infty[$. (**B**) $]-\infty, 0[\cup \{1\} \cup]4, +\infty[$.

(**C**) $]-\infty, 0] \cup]4, +\infty[$. (**D**) $]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$.

3. Considere a função f, real de variável real, tal que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ e definida por,

$$f(x) = \log_2\left(2\sqrt[3]{x}\right)$$

onde $\log_2$ representa a função logaritmo na base 2.

Qual é a expressão designatória equivalente à função f?

(**A**) $2 + \log_2(\sqrt[3]{x})$. (**B**) $2\log_2(\sqrt[3]{x})$.

(**C**) $\dfrac{1 + \log_2(x)}{2}$. (**D**) $\dfrac{3 + \log_2(x)}{3}$.

4. Considere a função g, real de variável real, definida por,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{3x} & se \quad x < 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ \dfrac{4x + 1}{x} & se \quad x > 0 \end{cases} .$$

Qual é a afirmação verdadeira relativamente à continuidade da função g, em $x = 0$?

(**A**) É descontínua à esquerda e à direita.

(**B**) É descontínua à esquerda e contínua à direita.

(**C**) É contínua à esquerda e descontínua à direita.

(**D**) É contínua à esquerda e à direita.

5. Considere a função h, real de variável real, tal que $h(x) + h''(x) = 0$.

Qual é a expressão analítica que não pode definir a função h?

(**A**) $\sin(x)$. (**B**) $\cos(x)$. (**C**) $\cos(2x)$. (**D**) $\sin(x) - \cos(x)$.

6. Considere a sucessão (a_n) definida por recorrência,

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 2 + a_{n+1} \end{cases} , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Qual é o quarto termo da sucessão?

(**A**) -10. (**B**) -9. (**C**) -7 (**D**) 9.

7. Considere as afirmações:

I. "Uma sucessão não convergente não é uma sucessão limitada".

II. "Uma sucessão que tende para $-\infty$ pode não ser decrescente".

Qual é a afirmação verdadeira?

(**A**) I é falsa e II é verdadeira.

(**B**) I é verdadeira e II é falsa.

(**C**) I é falsa e II é falsa.

(**D**) I é verdadeira e II é verdadeira.

8. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os dígitos 5, 6, 7, 8 e 9.

   Quantos números, de entre todos os números, têm exatamente três dígitos 5?

   (A) $4^2 \cdot ({}^5C_3)$. **(B)** $4^2 \cdot ({}^5A_3)$. **(C)** $({}^4A_2) \cdot ({}^5C_3)$. **(D)** $({}^5A_3) \cdot ({}^4C_2)$.

9. Considere que os alunos de um curso fizeram as seguintes opções em relação à escolha de idiomas estrangeiros:

   - 25% dos alunos escolheram o idioma Inglês (podendo, ou não, ter escolhido o idioma Espanhol).
   - 15% dos alunos escolheram o idioma Espanhol (podendo, ou não, ter escolhido o idioma Inglês).
   - 10% dos alunos escolheram ambos os idiomas (Espanhol e Inglês).

   Qual é a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter escolhido o idioma Espanhol, sabendo que também escolheu o idioma Inglês?

   (A) $\frac{1}{4}$. **(B)** $\frac{2}{5}$. **(C)** $\frac{1}{2}$. **(D)** $\frac{3}{5}$.

10. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

    Sabe-se que $P(A) = P(B)$, $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0,8$ e $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0,2$.

    Qual é a probabilidade de se realizar B sabendo que se realiza A?

    (A) $0,5$. **(B)** $0,4$. **(C)** $0,3$. **(D)** $0,2$.

Grupo II

• Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de maneira clara, indicando **todos os cálculos** que efetuar e **todas as justificações** necessárias.

• Pode **recorrer à sua máquina de calcular** para efetuar cálculos e obter representações gráficas de funções.

• **Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere a função f, real de variável real, definida por,

$$f(x) = \frac{2x}{1 + \ln(x)}$$

onde ln representa a função logaritmo na base e e e representa o número de Neper.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

(a) Determine o domínio da função f.

(b) Determine a primeira derivada da função f.

(c) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

(d) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa e.

2. O momento sísmico M_0 é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo.

Só uma pequena fração do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada E e que é a que os sismógrafos registam.

A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$.

A magnitude M de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2,9$ ($\log_{10}$ representa a função logaritmo na base 10).

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

(a) Admita que em 2025 ocorreu um sismo com a magnitude $7,1$.

Determine o momento sísmico M_0 para esse sismo.

Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10.

(b) Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos.

Demonstre que se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $2/3$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

3. Considere a sucessão (u_n), definida por recorrência,

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

(a) Demonstre que (u_n) é uma progressão aritmética crescente.

(b) Determine uma expressão do termo geral da sucessão (u_n).

(c) Determine o valor do limite,

$$\lim \frac{\sqrt{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n}}{4n + 3}.$$

4. Considere que num saco há apenas bolas brancas e bolas pretas.

As bolas brancas são 12.

Ao acaso, extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Considere os acontecimentos:

A: "A primeira bola extraída é preta".

B: "A segunda bola extraída é branca".

Sabe-se que $P(B|A) = 0,6$.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, indique, justificando, quantas bolas pretas existem inicialmente no saco?

5. Considere uma experiência aleatória, com espaço de resultados Ω finito e dois acontecimentos $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, associados a essa experiência.

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, demonstre a igualdade,

$$1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) + P(A|B) \times P(B) = P(A) + P(B).$$

6. Na Figura 1 está representado um quadrado [ABCD] de lado 1.

O ponto E desloca-se sobre o lado [BC] e o ponto F desloca-se sobre o lado [CD], de tal modo que se tem sempre $\overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{FC}}$.

Para cada posição do ponto E, seja θ a amplitude do ângulo EAB ($\theta \in]0, \pi/4[$).

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva os itens seguintes.

(a) Demonstre que a área do triângulo [AEF] é dada, em função de θ, por,

$$A(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta)}{2}$$

onde tan representa a função tangente.

(b) Determine $\lim_{\theta \to 0} A(\theta)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

(c) Demonstre que,

$$A'(\theta) = -\frac{\tan(\theta)}{\cos^2(\theta)}$$

onde cos representa a função cosseno e estude a função A quanto à monotonia.

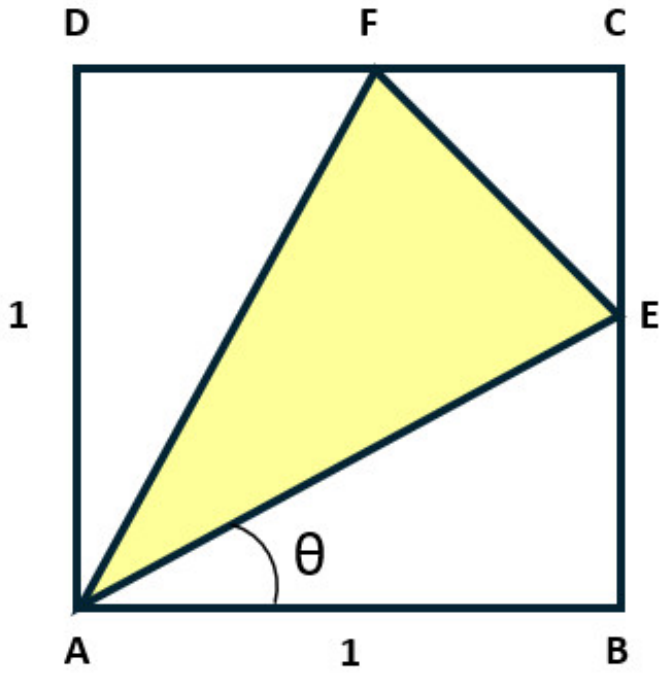

Figura 1: quadrado [ABCD] de lado 1.

FIM da Prova de Avaliação

FORMULÁRIO

Regras de Derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$\left(u^k\right)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u' \quad (k \in \mathbb{R})$

$(\sin(u))' = u' \cdot \cos(u)$

$(\cos(u))' = -u' \cdot \sin(u)$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

Área de Figuras Planas

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \cdot Altura$

Probabilidades

$\mu = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n \cdot (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$ então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n$

Progressão geométrica: $u_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Limites Notáveis

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{u_n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

COTAÇÕES

Grupo I **70**

Cada resposta certa 7

Cada resposta errada, anulada ou não respondida 0

Grupo II **130**

1. 30

(a) 5

(b) 10

(c) 10

(d) 5

2. 20

(a) 10

(b) 10

3. 20

(a) 4

(b) 6

(c) 10

4. 15

5. 15

6. 30

(a) 12

(b) 6

(c) 12

Total **200**